Devoir n°4 - Limites de Fonctions - TS

11 novembre 2015 - 1/2h

Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$f_1(x) = -3x^3 + x^2 + 4\sqrt{x}$; en $+\infty$ (1.~~25~~5 pt)

$f_2(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{4x^2-x+1}$; en $-\infty$ (1.~~25~~5 pt)

$f_3(x) = \dfrac{2x+3}{2x^2-7x+3}$; en 3 (1.5 pts)

$f_4(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{3x^2+5x+2}$; en -1 (1.5 pts)

$f_5(x) = (x^3+x-1)^4$; en $-\infty$ (1,5 pt)

$f_6(x) = \sqrt{x^2+1} + x$; en $-\infty$ (1,5 pt)

$f_7(x) = \dfrac{5+\sin x}{x}$; en $+\infty$ (1.5 pts)

$f_1(x) = x\left(-3x^2 + x + \dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)$ $x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2+x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2) = -\infty$ polynome

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Par Somme et Produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$

$f_2(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{4x^2-x+1}$ fonction rationnelle

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2}{4x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{2} = \dfrac{-1}{2}$ 1

La droite d'équation $y = \dfrac{-1}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_{f_2}$ en $-\infty$

$2x^2 - 7x + 3 = (x-3)(2x-1)$

x	$-\infty$		$1/2$		3		$+\infty$
$2x^2-7x+3$ $a=2$		+ signe de a	0	− de ($-a$)	0	+ signe de a	

$\lim\limits_{x\to 3} (2x+3) = 9$

$\lim\limits_{x\to 3^+} (2x^2-7x+3) = 0^+$

$\lim\limits_{x\to 3^-} (2x^2-7x+3) = 0^-$

Par Quotient $\lim\limits_{x\to 3^+} f_3(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f_3(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_{f_3}$

-1 est racine du numérateur et du dénominateur

$$f_4(x) = \frac{(x+1)(-x+3)}{(x+1)(3x+2)} = \frac{-x+3}{3x+2} \quad \underline{x \neq -1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1} (-x+3) = 4 \\ \lim_{x \to -1} (3x+2) = -1 \end{array}\right\} \text{ Par quotient } \lim_{x \to -1} f_4(x) = -4$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3+x-1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{polynôme}$$

$$X = x^3+x-1 \qquad \lim_{X \to -\infty} X^4 = +\infty$$

Par Composition $\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = +\infty$

$$f_6(x) = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \times \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \end{array}\right\}$$

Par Somme et quotient $\lim_{x \to -\infty} f_6(x) = 0$

L'axe des abscisses $(y=0)$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_{f_6}$ en $-\infty$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4 \leq 5 + \sin x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{x} \leq f_7(x) \leq \frac{6}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x} = 0$$

$x > 0$

D'après le théorème des gendarmes

$\lim_{x \to +\infty} f_7(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_{f_7}$ en $+\infty$