Correction du devoir n°2 – TS

ex1: 1) $u_n = n^2 - 3n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

/4 $\quad u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad \mathcal{D}_f = [0;+\infty[$

$f'(x) = 2x - 3$

x	$0 \qquad 3/2 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$

f décroissante sur $[0; 3/2]$ et croissante sur $[3/2; +\infty[$

$3/2 = 1{,}5$

1,5

$u_1 = -1$ et $u_2 = -1$

(u_n) croissante pour $n \geq 1$.

2) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1

$u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 + 3 \qquad 2u_n^2 + 3 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0 \qquad$ (u_n) croissante $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n > 0$

1,5

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+2}}{5^{n+1}} \times \dfrac{5^n}{3^{n+1}} = \dfrac{3}{5} \qquad \dfrac{3}{5} < 1$

donc $u_{n+1} < u_n \qquad$ (u_n) décroissante $\forall n \in \mathbb{N}$

---

ex2: On veut montrer que $(n^3 - n)$ est divisible par 3

/4 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par récurrence

0,5

- initialisation: pour $n = 0 \qquad 0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ 0,5

  vrai au rang 0 $\qquad$ multiple de 3

- hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k^3 - k$ divisible par 3

  càd il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k^3 - k = 3 \times p$

  ou encore $k^3 = 3p + k$

  1

  On veut montrer que $(k+1)^3 - (k+1)$ est divisible par 3.

  or $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$

  $= k^3 + 3k^2 + 2k$

  1,5

  $= 3p + k + 3k^2 + 2k$

  $= 3p + 3k^2 + 3k = 3(\underbrace{p + k^2 + k}_{\in \mathbb{N}})$

  divisible par 3

  Vrai au rang $k+1$

• conclusion : propriété vraie au rang $n=0$, héréditaire, donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$n^3 - n$ est divisible par 3

---

ex 3 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) $u_{n+1} - u_n = 2n+3$ or $2n+3 > 0$

donc (u_n) croissante $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On veut montrer que $u_n > n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence

• initialisation : pour $n=0$

$u_0 = 1$ $n^2 = 0$ $1 > 0$ vrai pour $n=0$

• hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ / $u_k > k^2$

on veut montrer que $u_{k+1} > (k+1)^2$

or $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$

donc $u_{k+1} > k^2 + 2k + 3$

donc $u_{k+1} > k^2 + 2k + 1 + 2$

soit $u_{k+1} > (k+1)^2 + 2 > (k+1)^2$

vrai au rang $(k+1)$

• conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > n^2$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

exo 4 : 1) $u_n = \dfrac{1}{n+1} - n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty \end{array}\right\} \text{Par Somme } \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$$

1,5

2) $u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

(u_n) converge vers 4 — 1,5

3) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$$u_n = \frac{n^2(2 + 1/n^2)}{n^2(1 + 1/n)} = \frac{2 + 1/n^2}{1 + 1/n}$$ 0,5

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \quad \text{Par Somme } \lim\limits_{n \to +\infty}\left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \quad \text{Par Somme } \lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 \end{array}\right\}$$ 1

Par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$ — 0,5

(u_n) converge vers 2

4) $u_n = \dfrac{2 + 5(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$ — 1

$\Rightarrow -5 \leq 5(-1)^n \leq 5$

$\Rightarrow -3 \leq 2 - 5(-1)^n \leq 7$

$\Rightarrow \dfrac{-3}{n} \leq u_n \leq \dfrac{7}{n} \quad \left(\dfrac{1}{n} > 0\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-3}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7}{n} = 0 \end{array}\right\}$$ 0,5

d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ — 0,5

(u_n) converge vers 0