Correction du devoir n° 1 TS

ex1 : sur $\mathbb{R}$ $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$

1) $\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 & \underline{X \in [0;+\infty[} \\ 3X^2 - 8X - 3 = 0 & \Delta = 100 \quad \sqrt{\Delta} = 10 \end{cases}$

$X_1 = \frac{8+10}{6} = 3 \qquad X_2 = \frac{8-10}{6} = \frac{-1}{3}$ ne convient pas

2

alors $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ $\boxed{S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}}$

2) sur $\mathbb{R}^+$ $3x - 8\sqrt{x} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{x} & X \in [0;+\infty[\\ 3X^2 - 8X - 3 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 3$

1 $\Leftrightarrow x = 9$ $\boxed{S = \{9\}}$

---

ex2 : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$

0,5 1) $P(1) = 2 - 1 - 1 = 0$ donc $\underline{1 \text{ racine de } P}$

2) alors $P(x) = (x-1)(2x^2 + bx + 1) = 2x^3 + bx^2 + x - 2x^2 - bx - 1$

$= 2x^3 + (b-2)x^2 + (1-b)x - 1$

2 Par identification des coefficients $\begin{cases} b - 2 = -1 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 = -1 \text{ vérifié} \\ b = 1 \end{cases}$

donc $\boxed{P(x) = (x-1)(2x^2 + x + 1)}$

3) $Q(x) = 2x^2 + x + 1$, $\Delta = -7$ $\Delta < 0$

donc $Q(x)$ est du signe de $a = 2$ soit > 0 sur $\mathbb{R}$

alors $P(x)$ est du signe de $x - 1$.

2

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{P(x) \geq 0 \text{ sur } [1;+\infty[}$

EX3 : $(E_m) : (m+1)x^2 - mx + m - 1 = 0$ $(m \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$

• si $m = 1$, (E_1) équation du 1er degré

1 $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $\underline{\text{Une seule solution}}$ $S = \{2\}$

• si $m \neq -1$ (E_m) est du 2d degré

$$\Delta_m = m^2 - 4(m+1)(m-1)$$

0,5

$$= m^2 - 4(m^2-1) = -3m^2 + 4$$

$$\Delta_m = 0 \iff m^2 = \frac{4}{3} \iff m = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

m	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		-1		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$a = -3$		signe de a		signe de $-a$				signe de a	

1

si $m < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $m > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ alors $\Delta_m < 0$ 1,5
l'équation n'admet aucune solution

si $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ alors $\Delta_m = 0$
l'équation admet une seule solution

si $m \in \left]-\frac{2\sqrt{3}}{3} ; -1\right[\cup \left]-1 ; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$ alors $\Delta_m > 0$
l'équation admet 2 solutions

Ex4 : 1) sur $]-\pi ; \pi]$ $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

$$\iff \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases} \quad (k, k' \in \mathbb{Z}) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k'\pi}{3} \end{cases}$$

2

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{11\pi}{18} ; -\frac{7\pi}{18} ; \frac{\pi}{18} ; \frac{5\pi}{18} ; \frac{13\pi}{18} ; \frac{17\pi}{18} \right\}}$$

2) sur $[0 ; 2\pi[$ $4\cos^2 x - 3 \geq 0 \iff \cos^2 x \geq \frac{3}{4}$

2

$$\iff \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S = \left[0 ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[}$$

exo5 : $f(x) = \cos x \sin x$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

1) $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x)$
$= \cos x \times (-\sin x)$
$= -f(x)$

0,75

$\underline{f \text{ est impaire}}$

ou $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$
$f(-x) = \frac{1}{2}\sin(-2x)$
$= -\frac{1}{2}\sin(2x)$
$= -f(x)$

2) $f(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(x+\pi)$
$= -\cos x \times (-\sin x)$
$= \cos x \sin x = f(x)$

0,75

$\underline{f \text{ est } \pi\text{-périodique}}$

ou $f(x+\pi) = \frac{1}{2}\sin(2(x+\pi))$
$= \frac{1}{2}\sin(2x+2\pi)$
$= \frac{1}{2}\sin(2x)$

3) on peut étudier f sur une période $[-\pi/2 ; \pi/2]$
et mieux sur $[0 ; \pi/2]$
par symétrie on obtiendra l'étude sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$
0,5
puis par translation sur $\mathbb{R}$
($\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'origine O)

4) $f'(x) = -\sin x \sin x + \cos x \cos x$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$
1
$= \underline{\cos(2x)}$

ou $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x)$
$= \cos(2x)$

$x \in [0 ; \pi/2] \Leftrightarrow 2x \in [0 ; \pi]$
$\cos(2x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq \pi/2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi/4$

1

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

0,5

exo 6 : $\sin x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ $\quad x \in [0 ; \pi/2]$ donc $\begin{cases} \cos x \geqslant 0 \\ \sin x \geqslant 0 \end{cases}$

- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= 1 - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4-2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

donc

$$\boxed{\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\sin(2x) = \frac{1}{2}}$$

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$2x \in [0 ; \pi]$ $\quad \begin{cases} \sin(2x) = \frac{1}{2} \\ \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

donc $2x = \dfrac{5\pi}{6}$

soit $x = \dfrac{5\pi}{12}$