

135

Ex 1: $X \sim \mathcal{E}_\lambda (\lambda > 0)$

$P(X \leq 2) = 0,15 \Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0,15 \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0,85$
 $\Leftrightarrow -2\lambda = \ln(0,85) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \ln(0,85) \approx 0,081$ 1,5

2) on admet que $\lambda \approx 0,081$

a) $P(X > 3) = P(X > 3) = e^{-3\lambda} \approx e^{-3 \times 0,081} \approx 0,78$ 1

b) $h > 0$

$$\frac{P(X > t + h)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t \text{ et } X > t+h)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X > h) = P(X > h)$$
 1,5

c) $P_{X > 3}(X > 3+2) = P(X > 2) = e^{-2\lambda} \approx e^{-2 \times 0,081} \approx 0,85$
 Probabilité que le moteur fonctionne 2 ans sachant qu'il a déjà fonctionné pendant 3 ans

d) $E(X) = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0,081} \approx 12,35$ 1 + 0,5

En moyenne, on peut espérer que le moteur fonctionne 12,35 années soit 12 ans et 4 mois environ.

3) Pourcentage des moteurs défectueux $p = 0,01$
 Echantillon $n = 800$

conditions vérifiées: $n \geq 30$ $np = 8 (\geq 5)$ 0,5
 et $n(1-p) = 792 (\geq 5)$ 1

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence associée, au seuil de 95% est

$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,003 ; 0,017]$ 1,5

$f_{obs} = \frac{15}{800} = 0,01875$ $f \notin I$ 0,5

donc le test remet en question l'annonce de l'entreprise au risque de 5%

0,5

Ex 2: Partie A

1) $X \sim N(50; 12^2)$

d'après la calculatrice $P(X \leq 49) \approx 0,202$
probabilité qu'un pot soit non conforme 1

2) $Z = \frac{X-50}{\sigma'}$ avec $X \sim N(50; \sigma'^2)$ 95

a) d'après le cours $Z \sim N(0; 1)$ 9,5

b) d'après la calculatrice

$P(Z \leq u) = 0,06 \Leftrightarrow u \approx -1,555$ 1

c) $X \leq 49 \Leftrightarrow X - 50 \leq -1 \Leftrightarrow Z \leq \frac{-1}{\sigma'}$

donc $P(X \leq 49) = 0,06 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{-1}{\sigma'}) = 0,06$ 2

$\Leftrightarrow \frac{-1}{\sigma'} \approx -1,555 \Leftrightarrow \sigma' = \frac{1}{1,555} \approx 0,643$

3) $p = 0,06$ proportion des pots non conformes dans un échantillon de $n = 50$ pots.

a) $Y \sim B(50; 0,06)$ On répète 50 fois la même expérience de Bernoulli: "Tester un pot" avec 2 issues possibles (de façon indépendante)

1 S: "le pot m est pas conforme" et S
 $P(S) = p = 0,06$

b) $P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$
 $\approx 0,416$ d'après la calculatrice 1

Partie B: $f_{obs} = \frac{99}{140}$ $n = 140$ ($n > 30$)

On suppose les conditions vérifiées
L'intervalle de confiance de la proportion de personnes satisfaites au seuil de 95% est

$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{m}}; f + \frac{1}{\sqrt{m}} \right] \approx [0,622; 0,792]$

Soit entre 62,2% et 79,2% de personnes