Correction du devoir n°11 – TS

Ex1 : $A(-1;-1;-1)$ $\quad$ $\mathcal{P} : 2x+y-z+5=0$
$B(1;1;1)$
$C(0;3;1)$

① $\mathcal{D}_1$ de vecteur directeur $\vec{u}(2;1;1)$
donc ⓐ et ⓓ ne conviennent pas
$\hookrightarrow \vec{u}_a\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_d\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ non colinéaires à $\vec{u}$

Il faut vérifier que $A \in \mathcal{D}_1$

pour ⓒ $\begin{cases}-1 = 5+4t\\ -1=-3-2t\\ -1=1+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=5-4 \text{ vérifié}\\ -1=-3+2 \text{ vérifié}\\ t=-1\end{cases}$

donc ⓒ est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$

③ $\mathcal{D}_3 \begin{cases}x=1+t\\ y=-3-t\\ z=2-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$ $\qquad$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$

$\vec{v}\cdot\vec{n} = 2-1+2=+3$ $\qquad$ $\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$ $\quad$ $\vec{v} \not\perp \vec{n}$

donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ non parallèles

$\begin{cases}x=1+t\\ y=-3-t\\ z=2-2t\\ 2x+y-z+5=0 \;(*)\end{cases}$

$(*)$ $2(1+t)+(-3-t)-(2-2t)+5=0$
$\Leftrightarrow 2+3t=0$
$\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$

$\begin{cases}x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=-3+\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}\\ z=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}\end{cases}$

$\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{P}$ se coupent en $E\left(\frac{1}{3};-\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$ ⓒ

④ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires donc A, B, C non alignés et définissent un plan (ABC)

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0+2-2=0 & \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -2+4-2=0 & \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC)

alors le plan (ABC) et $\mathcal{P}$ sont parallèles

Une équation cartésienne de (ABC) est

$2x+y-z+d=0$

$C\in(ABC) \iff 3-1+d=0 \iff d=-2$

(ABC) : $2x+y-z-2=0$

Les plans (ABC) et $\mathcal{P}$ sont donc strictement parallèles ($2x+y-z-2 = 2x+y-z+5$ $\iff -2=5$ impossible)

⑤ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0+8+4=12$

$AB^2 = 2^2+2^2 = 8$ donc $AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$AC^2 = 1^2+4^2+2^2 = 1+16+4 = 21$ donc $AC=\sqrt{21}$

donc $12 = 2\sqrt{2}\sqrt{21}\cos\widehat{BAC}$

$\iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{6}{\sqrt{42}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{6}\sqrt{7}}{7} = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$

et $\widehat{BAC}\simeq 22,2°$

② $\mathcal{D}_2 : \begin{cases}x=-1+t\\ y=t\\ z=-2-t\end{cases}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = 2-1-1=0$

donc $\mathcal{D}_2\perp\mathcal{D}_1$

$\begin{cases}x=-1+t'\\ y=t'\\ z=-2-t'\end{cases}$ et $\begin{cases}x=5+4t\\ y=-3-2t\\ z=1+2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1+t'=5+4t\\ t'=-3-2t\\ -2-t'=1+2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1=8+6t\\ t'=-3-2t\\ -2-t'=1+2t\end{cases}$

$t, t'\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases}t=-3/2\\ t'=0\\ -2=1-3 \text{ vrai}\end{cases}$ donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en $T(-1;0;-2)$

$\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1$ perpendiculaires

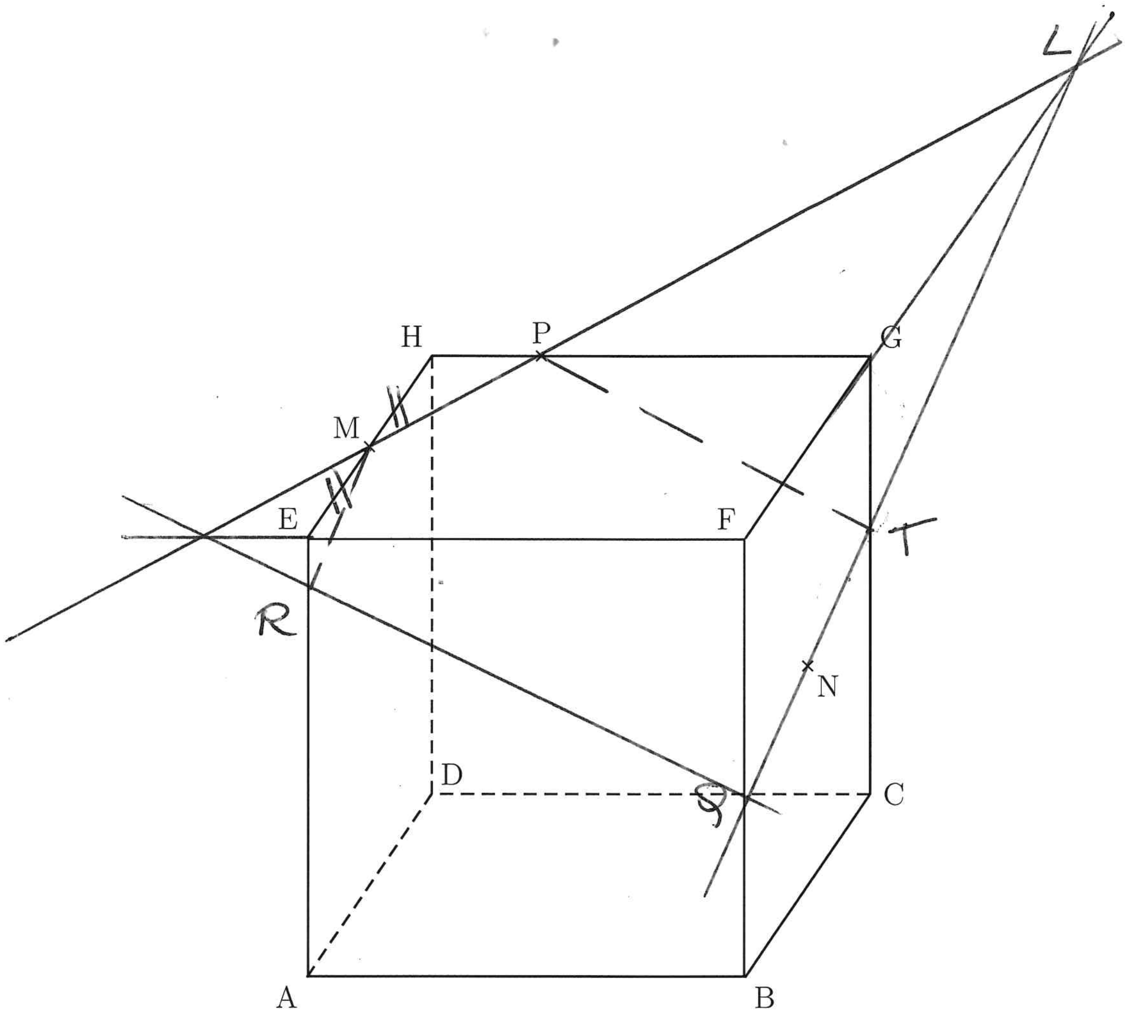
d

Exercice 2 (3 pts) : On considère un cube $ABCDEFCH$.

On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}$.

Le but de l'execrcice est de construire la Section du cube par le plan (MNP).

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L ; construire le point L.
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).



1) Les droites (MP) et (FG) sont contenues dans le plan (EFG) or $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{FG}$ non colinéaires
$\left(\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} + \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}\right)$
donc (MP) et (FG) sécantes en un point L

2)

3) La section du cube par le plan (MNP) est le polygone MPTQR.

(7)

Ex3 : f définie dérivable sur $\mathbb{R}$

(A) 1) D'après le graphique

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

2) F primitive de f sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $F' = f$
donc le signe de $f(x)$ donne les variations de F

0,5

(b) d'après ce tableau, F admet un minimum en $x = -2$ donc seule $\mathscr{C}_1$ convient. (F décroissante sur $]-\infty ; -2]$ puis croissante)

1

(a) $F'(0) = f(0) = 2$ et $F'(-2) = f(-2) = 0$

0,5

B $f(x) = (x+2)\, e^{1/2 x}$

1) f dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

0,25

(a) $f'(x) = 1 \times e^{1/2 x} + (x+2) \times \frac{1}{2}\, e^{1/2 x}$

$= e^{1/2 x}\left(1 + \frac{x}{2} + 1\right) = e^{1/2 x}\left(2 + \frac{x}{2}\right)$

$= \boxed{\frac{1}{2}\, e^{1/2 x}\,(4+x)}$

0,75

(b) $\frac{1}{2} e^{1/2 x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(4+x)$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

donc f décroissante sur $]-\infty ; -4]$ et croissante sur $[-4 ; +\infty[$.

1

f admet donc un minimum en $x = -4$

2) $I = \int_0^1 f(x)\, dx$

(a) f continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable.

x	0	1
$f(x)$	2 $\nearrow$	$3e^{1/2}$

donc $f(x) > 0$ sur $[0 ; 1]$

$0 < 1$

1

Alors I est l'aire (en u.a) du domaine limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, l'axe des abscisses et $\mathscr{C}$.

ⓑ $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$
$v(x) = e^{1/2 x}$ $\quad v'(x) = 1/2\, e^{1/2 x}$

0,75 $2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) = 2(e^{1/2 x} + \frac{1}{2} x e^{1/2 x})$
$= e^{1/2 x}(2 + x) = f(x)$

ⓒ Alors $2u(x)v(x) = G(x)$ une primitive de f sur $\mathbb{R}$
$I = G(1) - G(0)$ $\quad G(x) = 2x e^{1/2 x}$
0,75 $= 2e^{1/2}$ u.a.

3) ⓐ pour $n = 3$

S	0	$\frac{1}{3} f(0)$	$\frac{1}{3}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$	$\frac{1}{3}\left(f(0) + f(1/3) + f(2/3)\right)$
k	0	1	2	3

$S_3 = \frac{1}{3}\left(f(0) + f(1/3) + f(2/3)\right)$
approximation par les rectangles
On a partagé l'intervalle $[0;1]$ en 3 intervalles d'amplitude $1/3$.
S_3 est l'aire totale des 3 rectangles (en u.a) de dimensions respectives $1/3$, $f(0)$, $f(1/3)$, $f(2/3)$

ⓑ f étant croissante
I est minorée par S_3 et plus généralement par S_n $(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim_{n \to +\infty} S_n = I = 2e^{1/2}$