Correction du devoir n°6 - TS

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$ sur $[0;+\infty[$

$\boxed{F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(1+x^3) + k}$ primitives de f
car $1+x^3 > 0$

$g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+2}}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} u(x) = 3x^2+2 \\ u'(x) = 6x \end{cases}$

$g = \dfrac{1}{6}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ $\quad G = \dfrac{1}{6} \times 2\sqrt{u} + k$

$\boxed{G(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2+2} + k}$ primitives de g

---

Ex 2 : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

$f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$

$\begin{cases} f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^2} \\ F = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-1}{u} \\ F(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2x+1} \end{cases}$

$I = F(1) - F(0)$
$= -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)$
$= -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{6} = 1/3$

$J = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{(\cos x)^3}\,dx$

$g(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x)^3}$ $\quad u(x) = \cos x$, $u'(x) = -\sin x$

$\begin{cases} g = \dfrac{-u'}{u^3} = -u'u^{-3} \\ G = -\dfrac{u^{-2}}{-2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{u^2} \\ G(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x} \end{cases}$

$J = G(\pi/3) - G(0)$
$= \dfrac{1}{2(\cos \pi/3)^2} - \dfrac{1}{2(\cos 0)^2}$
$= \dfrac{1}{2 \times \frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1/2} - 1/2 = 2 - 1/2 = 3/2$

~~Ex~~3 : $f_n(x) = x^n e^{-x}$ définie sur $[0;1]$

$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) $f_1(x) = xe^{-x}$ continue sur $[0;1]$

$F(x) = (ax+b)e^{-x}$ est une primitive de f_1 sur $[0;1]$

$\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

or $F'(x) = ae^{-x} + (ax+b)(-e^{-x}) = (-ax+a-b)e^{-x}$

donc $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

$F(x) = (-x-1)e^{-x}$ est une primitive de f_1

alors $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = F(1) - F(0)$

$= -2e^{-1} - (-1) = 1 - 2e^{-1}$

2) a) f_n continue et positive sur $[0;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$x^n \geq 0 \qquad e^{-x} > 0$

donc I_n est l'aire (en u.a) délimitée par les droites d'équations $x=0$, $x=1$, $y=0$ et C_n

d'après le graphique, plus n grandit, plus cette aire diminue

donc (I_n) est décroissante $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^n e^{-x}(x-1)$

$x \in [0;1] \qquad x^n \geq 0 \quad e^{-x} > 0 \quad x-1 \leq 0$

donc $\boxed{f_{n+1}(x) \leq f_n(x)}$ $\qquad \begin{cases} f_n \text{ continue} \\ 0 < 1 \end{cases}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

par passage à l'intégrale

$$\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

Soit $I_{n+1} \leq I_n$ donc (I_n) décroissante

ⓑ $f_n(x) \geq 0$ $\forall x \in [0;1]$ Par positivité
f_n continue de l'intégrale
$0 < 1$

$\int_0^1 f_n(x)\,dx$ soit $I_n \geq 0$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

(I_n) décroissante et minorée par 0
donc (I_n) converge

ⓒ $x^n - f_n(x) = x^n - x^n e^{-x} = x^n(1-e^{-x}) = x^n\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$
$n \in \mathbb{N}^*$ $= x^n\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)$ • $x^n \geq 0$
$x \in [0;1]$ • $e^x > 0$
• $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$
$\Rightarrow e^x - 1 \geq 0$

alors $\boxed{x^n \geq f_n(x)}$

ⓓ $f_n(x) \leq x^n$ sur $[0;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
f_n continue et $x \mapsto x^n$ continue sur $[0;1]$
$0 < 1$
par passage à l'intégrale $\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$
donc $I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$
soit $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ or $I_n \geq 0$
donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Ex 4 : $f(x) = (x-1)e^{1-x}$ définie sur $[1;+\infty[$

1) $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt \quad x \geq 1$

ⓐ f continue comme composée et produit de fonctions continues sur $[1;+\infty[$

donc F est dérivable sur $[1;+\infty[$

et $\underline{F'(x) = f(x) = (x-1)e^{1-x}}$ $\quad \left.\begin{array}{l} e^{1-x} > 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array}\right\}$

donc $f(x) \geq 0$ et $\underline{F \text{ croissante sur } [1;+\infty[}$

ⓑ $G(x) = -x e^{1-x}$ définie dérivable sur $[1;+\infty[$

$G'(x) = -e^{1-x} - x(-e^{1-x}) = -e^{1-x} + x e^{1-x}$

$= (x-1)e^{1-x} = f(x)$

donc G est une primitive de f sur $[1;+\infty[$

alors $F(x) = G(x) - G(1) = -xe^{1-x} - (-1)$

$= \boxed{1 - x e^{1-x}}$

2) ⓐ $\mathcal{D}_4$ graphique

ⓑ $\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \text{ sur } [1;+\infty[\\ f \text{ continue} \end{array}\right|$ donc l'aire de $\mathcal{D}_a$ en u.a est $F(a) = \int_1^a f(x)\,dx$.

soit $\boxed{F(a) = 1 - a e^{1-a} \quad (u.a)}$

ⓒ $F(a) = 1 - a e^1 e^{-a} = 1 + e \times (-a) e^{-a}$

$\lim\limits_{a \to +\infty} -a = -\infty$

$X = -a \quad \lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$

$\left\{\begin{array}{l} \text{Par Composition produit et Somme} \\ \lim\limits_{a \to +\infty} F(a) = 1 \end{array}\right.$

Graphiquement l'aire de $\mathcal{D}_a$ tend vers 1 quand a devient de plus en plus grand.