Correction du devoir n°9 - TS

Ex 1 : $I = \int_{-1}^{2} \frac{1}{(x-3)^3}\,dx$ /7

$f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} = (x-3)^{-3}$ définie continue sur $[-1;2]$
$x-3 \neq 0$

$F(x) = \frac{(x-3)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2(x-3)^2}$ une primitive de f

donc $I = F(2) - F(-1) = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{32} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{32} = \frac{-15}{32}$

$J = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3x+5}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln(3x+5)\right]_{-1}^{2}$ $\quad 3x+5>0$ sur $[-1;2]$

$= \frac{1}{3}(\ln 11 - \ln 2) = \frac{1}{3}\ln\frac{11}{2}$

$K = \int_{-1}^{1} x e^{3x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{6}e^{3x^2-1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}(e^2 - e^2) = 0$

Ex 2 : $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ définie sur $[0;1)$ $\quad n \geq 1$

/13

$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$

1) a) f_n continue positive sur $[0;1]$ $\quad 0<1$

$n \geq 1$ donc I_n est l'aire (en u.a) du domaine délimité par les droites d'équations $x=0$, $x=1$, $y=0$ et $\mathcal{C}_{f_n}$

2/

D'après le graphique $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_{200}(x)$ sur $[0;1)$ donc les aires augmentent

(I_n) semble donc croissante

b) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} = \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$

$n \geq 1$ $\quad = \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$ $\quad$ sur $[0;1]$ $\quad x^n \geq 0$

$(1+x^{n+1})(1+x^n) > 0$

1,5

$-1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$

donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ sur $[0;1]$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x)\,dx$$ par linéarité

$x \mapsto f_{n+1}(x) - f_n(x)$

continue positive sur $[0;1]$ $\quad 0<1$

donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$ positivité de l'intégrale

alors $\boxed{I_{n+1} \geq I_n}$ (I_n) croissante pour $n \geq 1$

1

2) $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ $\quad$ $1+x>0$ sur $[0;1]$

$= [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$

1

3) a) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x^n \leq 2$

$n \geq 1$

$\Rightarrow \boxed{1 \geq \frac{1}{1+x^n}} \geq \frac{1}{2}$

1

b) $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$

$n \geq 1$ $\quad \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ sur $[0;1]$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto 1 \\ x \mapsto f_n(x) \\ \text{continues} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 dx$

$0<1$

c'est à dire $\boxed{I_n \leq 1}$

1,5

4) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (x^n)^2 \leq 1$

$n \geq 1$

$\Rightarrow 0 \geq -x^{2n} \geq -1$

$\Rightarrow 1 \geq 1 - x^{2n} \geq 0$

1,5

$\Rightarrow 1 \geq (1-x^n)(1+x^n) \geq 0$

or $1+x^n > 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1+x^n} \geq 1 - x^n}$

5) $\int_0^1 (1-x^n)\,dx = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1}$

6) $n \geq 1$ $\quad 1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$

$x \in [0;1]$

$x \mapsto 1-x^n$ continue

$0 < 1$

donc $\int_0^1 (1-x^n)\,dx \leq I_n \leq 1$

soit $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

d'après le théorème des gendarmes (I_n) converge vers 1

Ex3 : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$

1) a) $\boxed{u_0 + u_1} = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

par linéarité

$= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$

b) $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ soit $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ définie continue sur $[0;1]$

$F(x) = -\ln(1+e^{-x})$ une primitive de f

$1+e^{-x}$ positive

$u_1 = F(1) - F(0) = -\ln(1+e^{-1}) + \ln 2$

$= -\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + \ln 2 = -\ln\left(\frac{e+1}{e}\right) + \ln 2$

$= \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) + \ln 2 = \ln e - \ln(e+1) + \ln 2$

$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2 = \boxed{1 + \ln(2/e+1)}$

donc $u_0 = 1 - u_1 = \boxed{\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$

2) a) $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ fonction continue positive sur $[0;1]$

$0<1$ positivité de l'intégrale

donc $\boxed{u_n \geqslant 0}$ $(n \in \mathbb{N})$

b) $\boxed{u_n + u_{n+1}} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$ par linéarité

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$$

$\underline{n \in \mathbb{N}^*}$ $= \left[\dfrac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \dfrac{e^{-n}}{-n} - \dfrac{1}{-n} = \dfrac{-e^{-n}+1}{n}$

$$= \frac{1-e^{-n}}{n}$$

c) or $u_n \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$

$u_n + u_{n+1} \geqslant u_n$ donc $\boxed{\dfrac{1-e^{-n}}{n} \geqslant u_n}$ $n \in \mathbb{N}^*$

3) $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*}$ $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

$\dfrac{1-e^{-n}}{n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{ne^{n}}$ $\quad \underline{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = +\infty$ Par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{xe^{x}} = 0$

donc $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{-ne^{n}} = 0}$

Par Somme $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{-n} = 0}$

D'après le théorème des gendarmes

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$ (u_n) converge vers 0