Correction du devoir n° 6 - 1S

Ex 1 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,25

/15

1) ⓐ on veut montrer par récurrence que $u_n \geq 0$ pour $n \geq 3$

$u_1 = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$ $u_2 = \frac{-1}{4}$ $u_3 = \frac{-1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$ 0,75

0,5 * initialisation : $u_3 = 7/8$ $u_3 \geq 0$ vrai pour $n = 3$

* hérédité : on suppose $u_k \geq 0$ pour $k \geq 3$

alors $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + k - 1$

1,5 $k - 1 \geq 2 > 0$

$\frac{1}{2}u_k \geq 0$

donc $u_{k+1} \geq 0$ vrai au rang $k+1$

0,5 * conclusion : $\boxed{u_n \geq 0 \text{ pour } n \geq 3}$

ⓑ pour $n \geq 3$ $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq n - 1$

$N = n+1$ on a $u_N \geq N - 1 - 1$ pour $N \geq 4$

0,75 c'est à dire $\boxed{u_N \geq N - 2 \text{ pour } N \geq 4}$

ⓒ $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$ par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

0,75

2) Par définition de la limite, $\boxed{\text{il existe } N \in \mathbb{N}}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \geq 10^9$ donc l'algorithme

1 s'arrête.

3) $\boxed{v_n = 4u_n - 8n + 24}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24$

$= 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n + 16$

$n \in \mathbb{N}$ $= 2u_n - 4n + 12$

$= \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24)$

$= \frac{1}{2}v_n$

1,5

$v_0 = 4u_0 + 24$

$= 28$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$ de 1er terme $v_0 = 28$

0,5

Devoir n°8 - Suites - TS

17 mars 2015 - 1h

Exercice 1 (14 points) : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout entier supérieur ou égal à 3, $u_n \geq 0$.
   b) En déduire que pour tout entier supérieur ou égal à 4, $u_n \geq n - 2$.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. Compléter l'algorithme suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^9$:

Variables
n est un entier naturel
u est un réel

Traitement
n prend la valeur ..0.. 0,25
u...prend la valeur 1 0,5
Tant que ...$u < 10^9$... faire 0,5
u ...prend la valeur $\frac{1}{2}u + n - 1$ 0,5
n.....prend la valeur $(n+1)$ 0,5
Fintantque

Sortie
Afficher n

   Est-on sûr que l'algorithme va s'arrêter ?

3. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 4u_n - 8n + 24$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{7}{2^n} + 2n - 6$$

   c) En utilisant cette expression, retrouver la limite de (u_n).

4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + y_n$, où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) est suite arithmétique, dont on précisera pour chacune, le premier terme et la raison.
   b) En déduire l'expression de (S_n) en fonction de n entier naturel.

(b) alors $v_n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 0,25

or $u_n = \frac{1}{4} v_n + 2n - 6 = \boxed{7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6}$ 0,5

$= \boxed{\frac{7}{2^n} + 2n - 6}$ $(n \in \mathbb{N})$

(c)

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$

Par produit et sommes, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ 1

4) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ (a) $u_n = x_n + y_n$

• $x_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (x_n) suite géométrique

$n \in \mathbb{N}$ de raison $(1/2)$ de 1er terme $x_0 = 7$

• $y_n = 2n - 6$ (y_n) suite arithmétique

1 de raison 2 de 1er terme $y_0 = -6$

(b) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k + \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$

$= \frac{(y_0 + y_n) \times (n+1)}{2} + x_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$n \in \mathbb{N}$ $= \frac{(-6 + 2n - 6)(n+1)}{2} + 7 \times \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2}$

1,5 $= \boxed{(n-6)(n+1) + 14\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$

Ex 2 : $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$ définie sur $]-1 ; +\infty[$

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

1) (a) graphique 1

(b) Il semble que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante et converge vers 1

0,5

2) ⓐ on veut montrer par récurrence que $u_n \geq 1$

* initialisation : $u_0 = 4$ $4 > 1$ $u_0 \geq 1$ vrai au rang 0
* hérédité : posit $u_k \geq 1$ $(k \in \mathbb{N})$

$u_{k+1} = f(u_k) = 3 - \frac{4}{u_k + 1}$

2

$u_{k+1} - 1 = 2 - \frac{4}{u_k+1} = \frac{2u_k - 2}{u_k+1} = \frac{2(u_k - 1)}{u_k+1}$

$u_k + 1 > 0$ et $u_k - 1 \geq 0$ donc $u_{k+1} - 1 \geq 0$ vrai au rang $(k+1)$

* conclusion : $\boxed{u_n \geq 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$

ⓑ $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 3 - \frac{4}{u_n+1} - u_n$

$= \frac{3(u_n+1) - 4 - u_n(u_n+1)}{u_n+1}$

$n \in \mathbb{N}$ $= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n+1} = \frac{-(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n+1}$

$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 1}}$
$\begin{cases} u_n \geq 1 \Rightarrow u_n + 1 > 0 \\ (u_n - 1)^2 \geq 0 \end{cases}$

2

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff \boxed{u_{n+1} \leq u_n}$ $n \in \mathbb{N}$

ⓒ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers l $(l \geq 1)$

0,5

ⓓ Bonus : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right) = f(l)$
par continuité de f

or la limite est unique donc $\boxed{f(l) = l}$

$f(x) = x \iff 3 - \frac{4}{x+1} = x \iff \frac{-4}{x+1} = x - 3 \iff -4 = (x-3)(x+1)$

$\iff 0 = x^2 - 2x + 1 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$

l solution de l'équation $x = f(x)$

alors $l = 1$