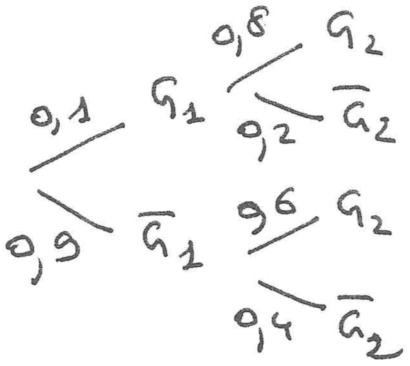
Correction du devoir n° 6 - TS

Ex 1 : G_n : « Max gagne la $n^{\text{ième}}$ partie »

$p_n = p(G_n)$

+0,5 rédaction

1) (a)



1

(b) $p_2 = p(G_2)$

$= p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2)$

$= 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}6$

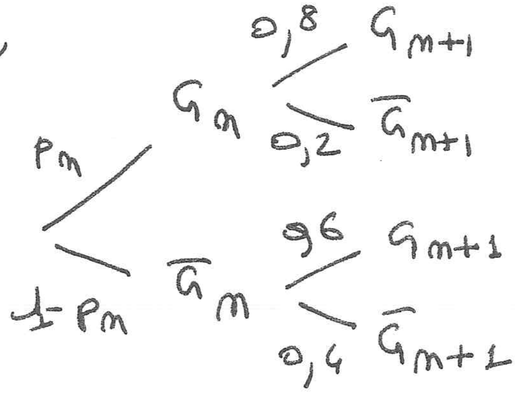
$= 0{,}08 + 0{,}54$

$= 0{,}62$

1

Probabilités Totales

2) (a)



0,5

(b) $n \geq 1$ $\quad p_{n+1} = p(G_{n+1})$

donc $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$

$= p_n \times 0{,}8 + (1-p_n) \times 0{,}6$

$= 0{,}8 p_n + 0{,}6 - 0{,}6 p_n$

$= \boxed{0{,}2 p_n + 0{,}6}$

1

(c) $\boxed{u_n = p_n - 0{,}75}$ $\quad n \geq 1$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75$

$= 0{,}2 p_n + 0{,}6 - 0{,}75$

$= 0{,}2 p_n - 0{,}15$

$= 0{,}2 (p_n - 0{,}75)$

$= \boxed{0{,}2 u_n}$

1,5

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_1 = -0{,}65$

0,5

$u_1 = p_1 - 0{,}75 = 0{,}1 - 0{,}75$

$= \boxed{-0{,}65}$

0,5

(d) alors $u_n = u_1 \times 0{,}2^{n-1} = -0{,}65 \times (0{,}2)^{n-1}$ $\quad n \geq 1$

et $p_n = u_n + 0{,}75 = \boxed{0{,}75 - 0{,}65 \times (0{,}2)^{n-1}}$

1

e) $p_{n+1} - p_n = \left(0{,}75 - 0{,}65 \times (0{,}2)^{n}\right) - \left(0{,}75 - 0{,}65 \times (0{,}2)^{n-1}\right)$

$= -0{,}65 \times (0{,}2)^{n} + 0{,}65 \times (0{,}2)^{n-1}$

$= 0{,}65 \times (0{,}2)^{n-1} \times (-0{,}2 + 1)$

$= 0{,}65 \times (0{,}2)^{n-1} \times 0{,}8$

$p_{n+1} - p_n > 0 \qquad n \geqslant 1$

1,5 $\Leftrightarrow p_{n+1} > p_n$ donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante

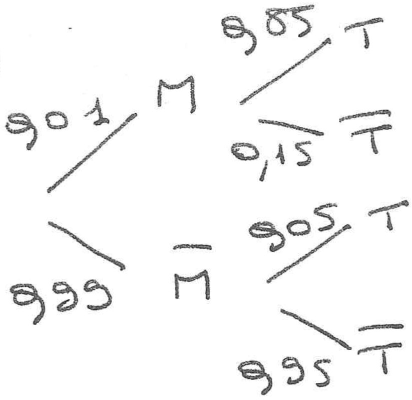
f) $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}2)^{n-1} = 0$

1 Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}75}$

3) $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante et converge vers 0,75 soit 3/4 donc Max ne peut espérer atteindre 3 chances sur quatre de gagner la partie même s'il joue très

1 longtemps. Il va s'y rapprocher cependant.

Ex2 : 1)



1

2) a) $M \cap T$: « l'animal est porteur de la maladie et le test est positif »

$\boxed{p(M \cap T)} = p(M) \times p_M(T)$
$= 0,01 \times 0,85$
$= \boxed{0,0085}$

b) $\boxed{p(T)} = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T)$ probabilités totales
$= 0,0085 + 0,99 \times 0,05$
$= 0,0085 + 0,0495$
$= \boxed{0,058}$

1

3) $\boxed{p_T(M)} = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,0085}{0,058} \approx \boxed{0,1466}$

1

4) a) On répète 5 fois l'expérience de Bernoulli « observer un animal parmi les cinq choisis » de façon successive et indépendante. Deux issues possibles : $S = T$ et $\overline{S} = \overline{T}$

$p(S) = p(T) = 0,058$. donc $p(\overline{S}) = 0,942$

2

X qui compte le nombre d'animaux ayant un test positif suit la loi binomiale $\boxed{B(5 ; 0,058)}$

1 b) $p(X=2) = \binom{5}{2} \times 0,058^2 \times 0,942^3 \approx \boxed{0,0281}$

1 c) $1 - p(X=0) = 1 - 0,942^5 \approx \boxed{0,2583}$

5) a) $E = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3$

7,30 € en moyenne pour un animal

b) $20 \times 7,3 = 146$ Pour un troupeau de 20 bêtes soumis au test, l'éleveur doit prévoir 146 € en moyenne

9,5