Correction du devoir n° 5 – TS

Ex 1 : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$ $\quad D_f =]0;+\infty[$

1) $g(x) = x^2e^x - 1$ $\quad D_g = [0;+\infty[$

ⓐ g dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x+x^2) = \boxed{xe^x(2+x)}$

$\left.\begin{array}{l} e^x>0 \text{ et } x>0 \\ 2+x>0 \end{array}\right\}$ sur $]0;+\infty[$ par produit $g'(x)>0$ 1

donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

0,25

ⓑ $g(0) = 0\times e^0 - 1 = -1$

$\left.\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\right)$ Par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ 0,5

Donc

x	0		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

sur $[0;+\infty[$
$\left\{\begin{array}{l} g \text{ continue} \\ g \text{ strictement croissante} \\ g(0) = -1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{array}\right.$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $[0;+\infty[$ 1

$\left.\begin{array}{l} g(0{,}703)<0 \\ g(0{,}704)>0 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{0{,}703 < \alpha < 0{,}704}$ 0,5

ⓒ g strictement croissante et $g(\alpha)=0$

donc

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

2) a) $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$

donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$ L'axe des ordonnées est asymptote verticale à C_f 0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 0,5

Par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) f dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ 0,5

c) $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

+0,75

d) $f(\alpha)$ est donc le minimum pour f sur $]0;+\infty[$

$f(\alpha) = e^\alpha + \frac{1}{\alpha}$ or $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 e^\alpha - 1 = 0$

$\iff e^\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$ 0,5

Donc $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = m$

e) $0,703 < \alpha < 0,704$

$\iff \frac{1}{0,704} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,703}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ continue strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$0,703 < \alpha < 0,704$

$\underset{\substack{x \mapsto x^2 \nearrow \\ \text{sur } [0;+\infty[}}{\iff} 0,703^2 < \alpha^2 < 0,704^2$

$\iff \frac{1}{0,704^2} < \frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{0,703^2}$ 1

Par somme $\underset{(\approx 3,438)}{\frac{1}{0,704^2} + \frac{1}{0,704}} < m < \underset{(\approx 3,446)}{\frac{1}{0,703^2} + \frac{1}{0,703}}$

Soit $\boxed{3,43 < m < 3,45}$

Ex 2 : $f(x) = (ax+b)\ln x$ $\quad D_f =]0;+\infty[$

14

- $A(1;0) \in \mathcal{C}_f \iff f(1) = 0$
- $B(3;0) \in \mathcal{C}_f \iff f(3) = 0 \iff (3a+b)\ln 3 = 0$

$\iff \boxed{3a+b=0}$ 1

- f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = a\ln x + (ax+b)\times\frac{1}{x} = a\ln x + \frac{ax+b}{x}$

$= \boxed{a\ln x + a + \frac{b}{x}}$ 0,5

T tangente à $\mathcal{C}_f$ en A de coefficient directeur (-2)

donc $f'(1) = -2 \iff a\ln 1 + a + \frac{b}{1} = -2$

$\iff \boxed{a+b=-2}$ 1,5

On a donc $\begin{cases} 3a+b=0 & (L_1) \\ a+b=-2 & (L_2) \end{cases} \underset{(L_1-L_2)}{\iff} \begin{cases} 2a=2 \\ b=-2-a \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$ 1

Donc $\boxed{f(x) = (x-3)\ln x}$

Ex 3 : $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$ $\quad D_f =]0;+\infty[$

1) ⓐ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x) = -\infty$ (par somme)

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ 0,5

ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0$

Par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ 1

ⓒ L'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. 0,75

2) ⓐ f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1/x \times x^2 - (1+\ln x)\times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x(1+\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{x[1-2(1+\ln x)]}{x \times x^3} = \frac{1-2(1+\ln x)}{x^3}$$

$$= \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$ 1

ⓑ $-1-2\ln x > 0 \iff 1+2\ln x < 0 \iff 2\ln x < -1$

$\iff \ln x < -1/2 \iff \ln x < -\frac{1}{2}\ln e$

$\iff \ln x < \ln\frac{1}{\sqrt{e}} \iff x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ $x \mapsto \ln x$ continue ~~strictement~~ croissante sur $]0;+\infty[$

$\boxed{S =]0;\frac{1}{\sqrt{e}}[}$ 1

$x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-1-2\ln x)$

0,25

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

0,5

ⓒ Alors 0,5

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$f(1/\sqrt{e})$	$\searrow$	0

0,5 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{(1/\sqrt{e})^2} = \frac{1-1/2}{1/e} = \frac{1/2}{1/e} = \frac{e}{2}$

3) ⓐ $f(x) = 0 \iff 1+\ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}$

0,75 Donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point $\boxed{A(\frac{1}{e};0)}$ $f(1/e) = \frac{1}{\quad}$

ⓑ Sur $[1/\sqrt{e};+\infty[$ f strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) > 0$

Sur $]0;1/\sqrt{e}[$ f st. $\nearrow$ 0,75 Alors

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

verticale à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. 0,75

2) ⓐ f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - (1+\ln x)\times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x(1+\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{x\left[1-2(1+\ln x)\right]}{x\times x^3} = \frac{1-2(1+\ln x)}{x^3}$$

$$= \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$ 1

ⓑ $-1-2\ln x > 0 \iff 1+2\ln x < 0 \iff 2\ln x < -1$

$\iff \ln x < -\frac{1}{2} \iff \ln x < -\frac{1}{2}\ln e$

$\iff \ln x < \ln\frac{1}{\sqrt{e}} \iff x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ ($x \mapsto \ln x$ continue strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\boxed{S =]0;\frac{1}{\sqrt{e}}[}$ 1

$x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-1-2\ln x)$

0,25

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

0,5

ⓒ Alors 0,5

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(1/\sqrt{e})$	$\searrow$	0

0,5 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\left(1/\sqrt{e}\right)^2} = \frac{1-1/2}{1/e} = \frac{1/2}{1/e} = \frac{e}{2}$

3) ⓐ $f(x) = 0 \iff 1+\ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}$

0,25 Donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point $\boxed{A\left(\frac{1}{e};0\right)}$

$f(1/e) = \frac{1}{}$

ⓑ Sur $[1/\sqrt{e};+\infty[$ f strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) > 0$

Sur $]0;1/\sqrt{e}[$ f st $\nearrow$ avec $f(1/e) = 0$

0,75 Alors

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	