Correction du devoir n°4 – TS

Ex 1 : 1) $f(x) = x^3 + 2 + \frac{1}{x^3}$ $\quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x - \frac{1}{2x^2} + K$

primitives de f sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ $\quad (K \in \mathbb{R})$ $\quad 1$

2) $g(x) = x^3(x^4-1)^2$ $\quad u(x) = x^4 - 1$, $u'(x) = 4x^3$ $\quad g = \frac{1}{4}u'u^2$

$$G(x) = \frac{1}{4} \times \frac{(x^4-1)^3}{3} + K = \boxed{\frac{1}{12}(x^4-1)^3 + K} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$(K \in \mathbb{R})$ $\quad 1$

3) $h(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ $\quad u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$ $\quad$ sur $]\frac{1}{2};+\infty[$

$h = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ $\quad 1,25$

$\boxed{H(x) = 3\sqrt{2x-1} + K}$ $(K \in \mathbb{R})$

4) $i(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$ $\quad$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}^*\}$

$u(x) = \cos x$, $u'(x) = -\sin x$ $\quad i = \frac{-u'}{u^2}$ $\quad \boxed{I(x) = \frac{1}{\cos x} + K}$ $(K \in \mathbb{R})$

$1,25$

5) $j(x) = \frac{7}{3x+1}$ $\quad u(x) = 3x + 1$, $u'(x) = 3$ $\quad j = \frac{7}{3} \times \frac{u'}{u}$

$\boxed{J(x) = \frac{7}{3}\ln|3x+1| + K}$ $\quad$ sur $]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]-\frac{1}{3};+\infty[$

$$\begin{cases} J(x) = \frac{7}{3}\ln(3x+1) + K & \text{pour } x > -\frac{1}{3} \\ J(x) = \frac{7}{3}\ln(1-3x) + K & \text{pour } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$1,5$

$16,5$

Ex2 : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0 \quad x \in]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \in \mathbb{R} \\ X^2 - 2X - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ (X+1)(X-3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X = -1 \text{ ou } X = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \quad \text{ou} \quad \ln x = 3$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e} \quad \text{ou} \quad x = e^3$

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{e} ; e^3\right\}}$$

4

Ex 3 : (A) $g(x) = x - 2 - 2\ln x$ sur $\mathcal{D} = [2 ; +\infty[$

1) g est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme somme de fonctions dérivables car $x > 0$.

0,5 $g'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$ $\quad x \geq 2$ donc $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

0,5 $g'(x) \geq 0$ donc g strictement croissante sur $\mathcal{D}$

$g(x) = x\left(1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}\right)$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$ 1,5

alors

x	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\ln 4$ $\nearrow$	$+\infty$

0,5

2) g continue sur $[2 ; +\infty[$
g strictement croissante
$g(2) = -\ln 4$ (< 0) et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires

1 l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[2 ; +\infty[$.

0,5 $\begin{cases} g(5{,}35) < 0 \\ g(5{,}36) > 0 \end{cases}$ donc $\boxed{5{,}35 < \alpha < 5{,}36}$ 0,25

3) Alors

x	2		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

B $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-2}$ $\quad D_f = \underline{]2;+\infty[}$

1) a) $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 2} x\ln x = 2\ln 2$ (>0)

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty}$ 0,75

La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$. 0,5

b) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-2} = \dfrac{x}{x-2} \times \ln x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ (fonction rationnelle)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ 1,5

Par Produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) f dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables sur D_f car $x>0$ et $x-2 \neq 0$

$f'(x) = \dfrac{\left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)(x-2) - x\ln x \times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{(\ln x + 1)(x-2) - x\ln x}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{\cancel{x\ln x} - 2\ln x + x - 2 - \cancel{x\ln x}}{(x-2)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$ 1

$(x-2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]2;+\infty[$ 0,5

donc

x	2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

1

3) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha\ln\alpha}{\alpha-2}$ or $g(\alpha) = 0 \iff \alpha - 2 - 2\ln\alpha = 0$ 1

$\iff \alpha - 2 = 2\ln\alpha$ 0,5

Donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha\ln\alpha}{2\ln\alpha} = \dfrac{\alpha}{2}$ et $\boxed{2{,}67 < f(\alpha) < 2{,}68}$