Correction du devoir n°3 -

Ex 1 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x - 6}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 10 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ /3

$\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - x - 6) = 0$
$\lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$

2 est racine du numérateur et du dénominateur

$x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2+2x+3)$

donc pour $x \neq 2$ $f(x) = x^2 + 2x + 3$

$\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 3) = 11$ $\quad$ $\underline{11 \neq f(2)}$

or $f(2) = 10$

Donc f n'est pas continue au point d'abscisse 2

Ex 2 : $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

1) $x^2 - x^3 = x^2(1-x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x^3		$+$	0	$+$	0	$-$	

f est définie pour $x^2 - x^3$

soit pour $x \leq 1$ $\quad$ $\boxed{D_f =]-\infty ; 1]}$ $\quad$ /4 $\quad$ 1

2) f est continue sur D_f comme composée de fonctions continues sur D_f $\quad$ 0,5

3) en 0, $h \neq 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - 0}{h} = \frac{\sqrt{h^2 - h^3}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2(1-h)}}{h} = \frac{|h|\sqrt{1-h}}{h} = \tau_h$$

pour $h > 0$ $\quad$ $\tau_h = \dfrac{h\sqrt{1-h}}{h} = \sqrt{1-h}$ $\quad$ $\lim\limits_{h \to 0^+} \tau_h = \lim\limits_{h \to 0^+} \sqrt{1-h} = 1$ $\quad$ 2

$\neq$

pour $h < 0$ $\quad$ $\tau_h = \dfrac{-h\sqrt{1-h}}{h} = -\sqrt{1-h}$ $\quad$ $\lim\limits_{h \to 0^-} \tau_h = \lim\limits_{h \to 0^-} -\sqrt{1-h} = -1$

f n'est pas dérivable en 0

0,5

et la courbe admet 2 demi-tangentes au point $O(0;0)$ de coefficients directeurs -1 (à gauche) et $+1$ (à droite)

16

Ex3 : $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

1) $g(x) = \tan x - x$ définie dérivable sur I
$= \frac{\sin x}{\cos x} - x$ comme quotient et somme de fonctions dérivables sur I car $\cos x \neq 0$ 0,25

ⓐ $g(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} - (-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} + x = -\tan x + x$

$= -(\tan x - x) = -g(x)$ 0,5

Donc g est impaire

ⓑ on peut donc étudier g sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

$$g'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} - 1$$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} - 1 = \frac{1}{(\cos x)^2} - 1$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - 1 = \boxed{(\tan x)^2}$$ 0,75

$g'(x) \geq 0$ donc g croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ 0,25

0,75

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to \pi/2^-} (\cos x) = 0^+\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (-x) = -\pi/2$

Par Somme $\boxed{\lim\limits_{x \to \pi/2^-} g(x) = +\infty}$

Par Symétrie

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

$\mathcal{C}_g$ admet deux asymptotes verticales d'équations $x = -\pi/2$ et $x = \pi/2$

ⓒ $\left\{\begin{array}{l} g(0) = \tan 0 - 0 = 0 \\ g \text{ strictement croissante sur }]-\pi/2 ; \pi/2[\end{array}\right.$

donc

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

2) ⓐ f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$f(x) = g(x) - \frac{x^3}{3}$

0,5 $f'(x) = g'(x) - x^2 = (\tan x)^2 - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$

$= (\tan x + x)\, g(x)$

ⓑ Soit $h(x) = \tan x + x$ sur I

$h(-x) = -\tan x - x = -h(x)$ h impaire

sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ $h'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} + 1 = (\tan x)^2 + 2$

$h'(x) > 0$ donc

h strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

or $h(0) = \tan 0 + 0 = 0$

donc

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	0	$+$	$\Vert$

1,5 Par Symétrie

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$

Alors

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$h(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$

0,5

ⓒ Alors f est croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ 0,25

Ex 4 : 1) $g(x) = x^3 - 3x - 4$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$ Polynôme 18

a) $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ 0,25

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$ $a=3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim x^3 = -\infty \end{cases}$ 0,5

• Sur $]-\infty ; 1]$, (-2) est le maximum pour g atteint en $x = -1$ donc $g(x) < 0$ 0,5
et l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution

• Sur $[1 ; +\infty[$, g continue, strictement croisante
$g(1) = -6$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ 1
d'après le théorème de la valeur intermédiaire
l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α
sur $[1 ; +\infty[$

Au Total, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$ 0,5

$\left. \begin{array}{l} g(2,19) < 0 \\ g(2,2) > 0 \end{array} \right\}$ donc $2,19 < \alpha < 2,2$
alors $\boxed{\alpha \simeq 2,2}$ 0,5 par excès

b)

g continue strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ avec $g(\alpha) = 0$

donc

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

2) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ sur $D =]1 ; +\infty[$

a) f dérivable sur D comme quotient de fonctions dérivables sur D car $x^2 - 1 \neq 0$ 0,75

$f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2) \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2}$ 0,25

$\boxed{f'(x) = \dfrac{x \times g(x)}{(x^2 - 1)^2}}$ $x > 1$ donc $x > 0$ Alors f' et g ont
$(x^2 - 1)^2 > 0$ le même signe sur D

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$(\alpha > 1)$

0,25

0,5

• f fonction rationnelle

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

0,5

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2-1) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 1} (x^3+2x^2) = 3$

Par quotient $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$

0,75

c) $f(\alpha) = \frac{\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2-1}$ pour $\alpha \simeq 2,2$ $\boxed{f(\alpha) \simeq 5,3}$

0,25

d) $(T) : y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$

$f(2) = \frac{16}{3}$ $\quad f'(2) = \frac{2 \times g(2)}{9} = \frac{2 \times (-2)}{9} = \frac{-4}{9}$

donc $(T) : y = \frac{-4}{9}(x-2) + \frac{16}{3}$

$y = \frac{-4}{9}x + \frac{8}{9} + \frac{48}{9}$

$\boxed{y = \frac{-4}{9}x + \frac{56}{9}}$

0,75