Correction du devoir n°2 – TS

Ex 1 : • $f_1(x) = 5x^3 - x + 15\sqrt{x} \underset{x \neq 0}{=} x^3\left(5 - \frac{1}{x^2} + \frac{15}{x^2\sqrt{x}}\right)$ 0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5 - \frac{1}{x^2} + \frac{15}{x^2\sqrt{x}}\right) = 5$ 0,5 /1

Par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty}$

• $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x}$ fonction rationnelle 0,25

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ 1 /1,5

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote 0,25
horizontale à $\mathcal{C}_{f_2}$ en $-\infty$

• $f_3(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x - 6}$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6 $(x-2)(x+3)$ $a=1$		$+$ signe de a	ϕ	$-$ signe de $-a$	ϕ	$+$ signe de a	

0,5

$\lim\limits_{x \to 2} (x - 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + x - 6) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + x - 6) = 0^-$

Par quotient 0,25

$\boxed{\lim\limits_{x \to 2^+} f_3(x) = +\infty}$ 0,5 /2

$\boxed{\lim\limits_{x \to 2^-} f_3(x) = -\infty}$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_{f_3}$ verticale 0,25

• $f_4(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(2x-1)} = \dfrac{x-1}{2x-1}$ pour $x \neq -2$ 1 0,25 /2

$\lim\limits_{x \to -2} (x - 1) = -3$ et $\lim\limits_{x \to -2} (2x - 1) = -5$ 0,25

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to -2} f_4(x) = \frac{3}{5}}$ 0,5

• $f_5(x) = (-3x^2 + 5x - 11)^6$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 + 5x - 11 = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 = -\infty$ polynôme 0,5 /1,5

$X = -3x^2 + 5x - 11$ $\lim\limits_{X \to -\infty} X^6 = +\infty$ 0,5

Par composition $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_5(x) = +\infty}$ 0,5

- $f_6(x) = \dfrac{3-\cos x}{x-3}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$x < 0$ alors $x-3 < 0$

$\iff +1 \geq -\cos x \geq -1$

$\iff 4 \geq 3-\cos x \geq 2$

$\iff \dfrac{4}{x-3} \leq \dfrac{3-\cos x}{x-3} \leq \dfrac{2}{x-3}$

/2

1

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-3} = 0$ 0,25

0,25 + 0,25

D'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x) = 0}$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_{f_6}$ en $-\infty$ 0,25

- $f_7(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2} \times \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2} \times \dfrac{1}{(x+2)}$

,5

$\lim\limits_{x\to 2} (x-2) = 0$

$X = x-2 \quad \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

Par Composition 0,25

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$ 0,5

/2

or $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} f_7(x) = \dfrac{1}{4}}$

0,25. 0,25 0,25

- $f_8(x) = \sqrt{4x^2+3} + 2x = \sqrt{4x^2+3} + 2x \times \dfrac{\sqrt{4x^2+3} - 2x}{\sqrt{4x^2+3} - 2x}$

$= \dfrac{(4x^2+3) - 4x^2}{\sqrt{4x^2+3} - 2x} = \dfrac{3}{\sqrt{4x^2+3} - 2x}$ 0,5

/2

$\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^2+3) = +\infty$

$X = 4x^2+3 \quad \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Par Composition 0,75

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+3} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$

Par Somme et quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_8(x) = 0}$ 0,5

L'axe des abscisses est

0,25 asymptote horizontale en $-\infty$

- $f_9(x) = \dfrac{x^6-64}{x-2}$

$g(x) = x^6$ dérivable en 2 0,5

$g'(x) = 6x^5$

$f_9(x) = \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} f_9(x)} = g'(2) = 6\times 2^5 = 6\times 32 = 192$

0,5

/1

Ex 2

- $f_1(x) = (2x^3 - 3x + 7)^5$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$

0,75 $f_1'(x) = 5(2x^3 - 3x + 7)^4 \times (6x^2 - 3) = 5(2x^3 - 3x + 4)^4 \times 3(2x^2 - 1)$
$= 15(2x^2 - 1)(2x^3 - 3x + 7)^4$

- $f_2(x) = -2x^3\sqrt{x}$ $\mathcal{D} = [0; +\infty[$ dérivable sur $]0; +\infty[$

1,25 $f_2'(x) = -6x^2\sqrt{x} - 2x^3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-12x^2 \times x - 2x^3}{2\sqrt{x}}$

$f_2'(x) = \dfrac{-14x^3}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{7x^3}{\sqrt{x}}$

- $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$ $\mathcal{D} = [1; +\infty[$ dérivable sur $]1; +\infty[$

$\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{1 \times (x^2+1) - (x-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2 + 1 - 2x^2 + 2x}{(x^2+1)^2}$ 0,25

$= \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$ 0,5

donc $f_3'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}} \times \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$ 0,5

1,5

$= \boxed{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}} \times \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{2(x^2+1)^2}}$ 0,25

- $f_4(x) = \cos(3x - 1)$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$

0,75 $f_4'(x) = -\sin(3x - 1) \times 3 = \boxed{-3\sin(3x - 1)}$

- $f_5(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ $\mathcal{D} =]0; \pi[$

$f_5'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} \times \cos x = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ 0,75