Correction du devoir n°1 - TS

Ex1 : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$

1) $P(4) = 4^3 - 6\times 4^2 + 7\times 4 + 4 = 64 - 6\times 16 + 28 + 4 = 0$

donc 4 est racine de P

2) $P(x) = (x-4)(x^2 + bx - 1)$

$(x-4)(x^2+bx-1) = x^3 + (b-4)x^2 + (-1-4b)x + 4 = P(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-4 = -6 \\ -1-4b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ -1-4\times(-2) = 7 \end{cases}$ vérifié

donc $\boxed{P(x) = (x-4)(x^2-2x-1)}$

3) Soit $N(x) = x^2 - 2x - 1$ $\quad \Delta = 4+4 = 8 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \\ x_2 = 1-\sqrt{2} \end{cases}$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		4	$+\infty$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x-1	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

du signe de a à l'extérieur des racines $\quad a=1$

$P(x) > 0$ sur $]1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2}[\cup]4 ; +\infty[$

Ex2 : $x \in \mathbb{R} \quad -3x^4 + 2x^2 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ -3X^2 + 2X + 5 = 0 \end{cases} \quad X \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ (X+1)(-3X+5) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ \cancel{X = -1} \text{ ou } X = \frac{5}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$S = \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{3} ; \frac{\sqrt{15}}{3} \right\}$

Ex3 : $(E_m) : (m+2)x^2 - 2mx + m - 1 = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \; m \in \mathbb{R}$

1) (E_m) n'est pas du second degré $\Leftrightarrow \boxed{m = -2}$

$(E_{-2}) : 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/4 \quad S = \{3/4\}$

2) pour $m \neq -2$

ⓐ -2 est racine de $(E_m) \Leftrightarrow 4(m+2) + 4m + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -7/9$

(b) $\Delta_m = 4m^2 - 4(m+2)(m-1)$
$= -4(m-2) = -4m+8$

m	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
Δ_m	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

si $m<-2$ ou $-2<m<2$ alors $\Delta_m>0$ et (E_m) admet 2 solutions réelles distinctes

si $m=2$ alors $\Delta_2=0$ et (E_2) admet une seule solution.

si $m>2$ alors $\Delta_m<0$ et (E_m) n'admet aucune solution réelle.

Ex4 : $x\in[0;2\pi[$ $\quad 2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2+X-1=0 \\ X=\sin x \end{cases}$ $\quad X\in[-1;1]$ $\quad \Leftrightarrow \begin{cases} (X+1)(2X-1)=0 \\ X=\sin x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin x=-1$ ou $\sin x=1/2$

$S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$

Ex5 : $x\in]-\pi;\pi]$ $\quad \cos(3x)=\frac{\sqrt3}{2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x=-\pi/6+2k'\pi \end{cases}$ $\quad k, k'\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x=-\pi/18+\frac{2k'\pi}{3} \end{cases}$ $\quad S=\left\{-\frac{13\pi}{18};-\frac{11\pi}{18};-\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{18};\frac{11\pi}{18};\frac{13\pi}{18}\right\}$

Ex6 : $x\in]-\pi;\pi]$ $\quad 4\sin^2x-2<0 \Leftrightarrow \sin^2 x<\frac12$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt2}{2}<\sin x<\frac{\sqrt2}{2}$

$S=\left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Ex7 : $x\in[\pi/2;\pi]$ $\quad \cos x=-\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$ $\quad \cos x<0$ et $\sin x>0$

1) $\cos^2x+\sin^2x=1 \Leftrightarrow \sin^2x=1-\cos^2x=1-\frac{2+\sqrt2}{4}=\frac{2-\sqrt2}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{\sin x=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}}$

2) $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=\frac{2+\sqrt2}{4}-\frac{2-\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$

$\pi\le 2x\le 2\pi$ donc $2x=\frac{7\pi}{4}$ et $x=7\pi/8$