Ex 1 : Partie A :

1) $U \in (SB)$ avec $z_U = 1$ (donc $(DU) \parallel (OB)$)

2) $\begin{cases} V \text{ intersection du plan } (AEU) \text{ et de } (SC) \\ U \text{ intersection du plan } (AEU) \text{ et de } (SB) \end{cases}$

Donc (UV) intersection des plans (AEU) et (SBC)

or $(BC) \parallel (AE)$ car ABCE carré

avec $(BC) \subset (SBC)$

et $(AE) \subset (AEU)$

D'après le théorème du toit, $\boxed{(UV) \parallel (BC)}$ ($\parallel (AE)$)

3) $\boxed{\text{Soit } K\left(\frac{5}{6} ; \frac{-1}{6} ; 0\right)}$

- AUVE est un trapèze de bases $[AE]$ et $[UD]$

Dans le ~~triangle~~ SOB

$D \in [SO]$ | d'après le théorème de Thalès

$U \in [SB]$ | $\frac{SD}{SO} = \frac{SU}{SB} = \frac{DU}{OB}$

$(DU) \parallel (OB)$ |

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OD})$

$D(0;0;1)$ et $S(0;0;3)$, $B(0;1;0)$

donc $\frac{SD}{SO} = \frac{2}{3}$ alors $\vec{DU} = \frac{2}{3}\vec{OB}$ (ou $\vec{SU} = \frac{2}{3}\vec{SB}$)

$\begin{cases} x_U - 0 = 0 \\ y_U - 0 = 2/3 \\ z_U - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_U = 0 \\ y_U = 2/3 \\ z_U = 1 \end{cases}$ $\boxed{U\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)}$

- $\vec{UK}\begin{pmatrix} 5/6 \\ -5/6 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A(1;0;0)$, $E(0;-1;0)$ | $\vec{EA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{UK} \cdot \vec{EA} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$ donc $\boxed{(UK) \perp (EA)}$

de plus $\overrightarrow{KA}\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{KA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{EA}$ $\overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont colinéaires

donc E, K, A alignés

alors K est bien le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $ANVE$

Partie B : 1) Soit $\mathcal{P} : 3x - 3y + 5z - 3 = 0$

$E(0;-1;0) \in \mathcal{P}$, $A(1;0;0) \in \mathcal{P}$ et $U(0;\frac{2}{3};1) \in \mathcal{P}$

donc $\boxed{3x - 3y + 5z - 3 = 0}$ est bien une équation du plan (EAU)

2) Soit $(d) \perp (EAU)$ et $S(0;0;3) \in (d)$

alors $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ normal à (EAU) est un vecteur directeur de (d)

donc une représentation paramétrique de (d)

est $\boxed{\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

3) $\boxed{H(x;y;z)}$ intersection de (d) et du plan (EAU)

alors ses coordonnées vérifient

$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $3x - 3y + 5z - 3 = 0$

donc $9t + 9t + 15 + 25t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 43t = -12$

$\Leftrightarrow t = \frac{-12}{43}$

alors $\begin{cases} x_H = \frac{-36}{43} \\ y_H = \frac{36}{43} \\ z_H = \frac{69}{43} \end{cases}$

1. • Volume de la pyramide SABCE

$$V = \frac{1}{3} \times SO \times AB^2 = AB^2$$

Dans le carré ABCE de centre O, le triangle AOB est rectangle et isocèle en O de côtés $OA = OB = 1$

D'après Pythagore $AB = \sqrt{2}$

donc $\boxed{V = 2}$ (u.v)

• Volume du solide AUVES

$$V' = \frac{1}{3} \times \underbrace{SH}_{\text{hauteur}} \times \text{aire de AUVE}$$

or $SH^2 = \left(\frac{36}{43}\right)^2 + \left(\frac{36}{43}\right)^2 + \left(\frac{69}{43} - 3\right)^2 = \frac{6192}{(43)^2} = \frac{144 \times 43}{43^2}$

donc $\boxed{SH = \frac{12\sqrt{43}}{43}}$

alors $V' = \frac{1}{3} \times \frac{12\cancel{\sqrt{43}}}{\cancel{43}} \times \frac{5\cancel{\sqrt{43}}}{18} = \frac{60}{54} = \frac{10}{9}$ (u.v)

$V \neq 2 \times V'$ donc le plan (EAU) ne partage pas la pyramide SABCE en 2 solides de même volume

$\begin{cases} x_0 = -3 \\ x_{n+1} = 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = 4 \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{cases}$

1) ⓐ $\boxed{A_0(-3;4)}$; $\boxed{A_1(-4{,}8;1{,}4)}$ et $\boxed{A_2(-4{,}68;-1{,}76)}$

ⓑ Variables : i, x, y, t : nb réels

Initialisation : x prend la valeur (−3)
y prend la valeur 4

Traitement : pour i allant de 0 à 20
construire le pt de coord $(x;y)$
t prend la valeur x
x prend la valeur $\boxed{0{,}8x - 0{,}6y}$
y prend la valeur $\boxed{0{,}6t + 0{,}8y}$
fin pour

ⓒ D'après le nuage de points, il semble que les points A_n soient sur le cercle de centre O de rayon 5. $(n \in \mathbb{N})$

2) $z_n = x_n + iy_n$ affixe de A_n $\forall n \in \mathbb{N}$

ⓐ $u_n = |z_n|$ $(n \in \mathbb{N})$

On veut montrer que $u_n = 5$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Par récurrence

initialisation

• pour $n = 0$ $u_0 = |z_0| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
vérifié pour $n = 0$

hérédité

• on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ ~~tel~~ que $u_k = 5$

on veut montrer que $u_{k+1} = 5$

or $x_{k+1} = 0{,}8x_k - 0{,}6y_k$ et $y_{k+1} = 0{,}6x_k + 0{,}8y_k$

donc $z_{k+1} = (0{,}8x_k - 0{,}6y_k) + i(0{,}6x_k + 0{,}8y_k)$

alors $|z_{k+1}|^2 = (0{,}8x_k - 0{,}6y_k)^2 + (0{,}6x_k + 0{,}8y_k)^2$

soit $|z_{k+1}|^2 = 0{,}64\,x_k^2 - 0{,}96\,x_k y_k + 0{,}36\,y_k^2$
$+0{,}36\,x_k^2 + 0{,}96\,x_k y_k + 0{,}64\,y_k^2$
$= x_k^2 + y_k^2 = |z_k|^2$

donc $u_{k+1} = u_k = 5$

- Conclusion : la propriété $u_n = 5$ est vraie au rang $n=0$; elle est héréditaire alors elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Géométriquement $OA_n = 5 \ \forall n \in \mathbb{N}$
donc $\boxed{A_n \in \mathcal{C}(O;5)}$

(b) $z_{n+1} = (0{,}8\,x_n - 0{,}6\,y_n) + i(0{,}6\,x_n + 0{,}8\,y_n)$

et $e^{i\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n)$ avec $\begin{cases}\cos\theta = 0{,}8\\ \sin\theta = 0{,}6\end{cases}$
$= (0{,}8 + 0{,}6i)(x_n + iy_n)$
$= 0{,}8x_n + 0{,}8y_n i + 0{,}6x_n i - 0{,}6y_n$
$= (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$

Donc $\boxed{e^{i\theta} z_n = z_{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(c) Par Récurrence, montrons que $\boxed{z_n = e^{in\theta} z_0 \ (\forall n \in \mathbb{N})}$

initialisation : pour $n=0$ $z_0 = e^{i \times 0} \times z_0 = 1 \times z_0$
vérifié au rang $n=0$

hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N} / z_k = e^{ik\theta} z_0$
alors $z_{k+1} = e^{i\theta} z_k = e^{i\theta} \times e^{ik\theta} z_0 = e^{i(k+1)\theta} z_0$
vérifié au rang $k+1$

conclusion : la propriété est vraie pour $n=0$
elle est héréditaire

Donc $\boxed{z_n = e^{in\theta} z_0 \ (\forall n \in \mathbb{N})}$

d) $z_0 = x_0 + i y_0 = -3 + 4i = 5\left(\frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$

$\Longleftrightarrow z_0 = 5 \times (-0{,}6 + 0{,}8 i)$

<u>Angles associés</u>

on sait que $\begin{cases} \cos\theta = 0{,}8 \\ \sin\theta = 0{,}6 \end{cases}$ <u>donc</u> $\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta \\ \sin\left(\theta + \pi/2\right) = \cos\theta \end{cases}$

<u>Alors</u> $\underline{z_0 = 5 \times \left(\cos\left(\theta + \pi/2\right) + i \sin\left(\theta + \pi/2\right)\right) = 5 e^{i(\theta + \pi/2)}}$

Un argument de z_0 est <u>bien $(\theta + \pi/2)$</u>

e) $z_n = e^{in\theta} z_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

<u>alors</u> $\arg(z_n) = \arg\left(e^{in\theta} z_0\right) \quad (2\pi)$

$= \arg\left(e^{in\theta}\right) + \arg(z_0) \quad (2\pi)$

$= n \arg\left(e^{i\theta}\right) + \theta + \pi/2 \quad (2\pi)$

$= n\theta + \theta + \pi/2 \quad (2\pi)$

$= \boxed{(n+1)\theta + \pi/2 \quad (2\pi)}$

<u>or</u> $\underline{|z_n| = 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

A_{n+1} est l'image de A_n <u>par la rotation</u>
<u>de centre O d'angle θ (de sens direct)</u>

(on trace $[Ox)$ ~~tel que~~ $\widehat{A_n O x} = \theta$ (sens direct)
et $A_{n+1} = [Ox) \cap \mathcal{C}(O; 5)$)

Ex3 : **Partie A** : La variable aléatoire X qui modélise la masse d'une tablette de chocolat (en g) suit la loi normale $\mathcal{N}(100\,;\,1^2)$

1) $p(M) = p(98 \leq X \leq 102) \approx 0,954$ d'après la calculatrice

(remarque $98 = 100 - 2\sigma$
$102 = 100 + 2\sigma$)

2) Soit $Z = \dfrac{X - 100}{\sigma}$ alors Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$ (on cherche σ)

$98 \leq X \leq 102 \iff -2 \leq X - 100 \leq 2 \iff \dfrac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}$

on veut $p(98 \leq X \leq 102) \simeq 0,97$

soit $p\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,97$

$\iff 2\,p\left(0 \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,97$

$\iff p\left(0 \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,485$

$\iff p\left(Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) - p(Z \leq 0) = 0,485$

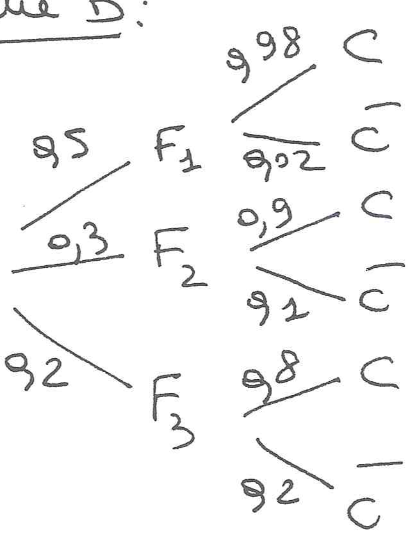
$\iff p\left(Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) - 0,5 = 0,485$

$\iff p\left(Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,985$

d'après la calculatrice $\dfrac{2}{\sigma} \simeq 2,17$ soit $\boxed{\sigma \simeq 0,922}$

Partie B :

1)



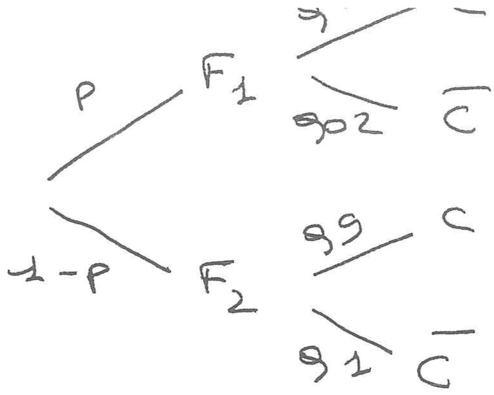
$P_C(F_1) = \dfrac{p(F_1 \cap C)}{p(C)}$

D'après les probabilités totales

$p(C) = p(F_1 \cap C) + p(F_2 \cap C) + p(F_3 \cap C)$
$= 0,5 \times 0,98 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8$
$= 0,92$

Donc $P_C(F_1) = \dfrac{0,5 \times 0,98}{0,92} \simeq 0,53$

2)



On veut $p(C) = 0{,}92$

$$p(C) = p(F_1 \cap C) + p(F_2 \cap C)$$
$$= 0{,}98p + 0{,}9(1-p)$$
$$= 0{,}08p + 0{,}9$$

$$0{,}08p + 0{,}9 = 0{,}92$$
$$\iff 0{,}08p = 0{,}02$$
$$\iff p = 0{,}25$$

L'entreprise doit donc acheter 25% chez le fournisseur 1 et 75% chez le fournisseur 2.

Ex 4 : Partie A : $u(x) = \ln x + x - 3$ $\quad \mathcal{D}_u =]0;+\infty[$

1) u est définie dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$u'(x) = \frac{1}{x} + 1$ $\quad u'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$

donc u strictement croissante sur $]0;+\infty[$

2) $u(2) = \ln 2 - 1 \approx -0{,}31$

$u(3) = \ln 3 \approx 1{,}10$

$\begin{cases} u \text{ est continue strictement croissante sur } [2;3] \\ u(2) < 0 \\ u(3) > 0 \end{cases}$ $\quad u(2) < 0 < u(3)$

D'après (le corollaire) du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[2;3]$

pour $0 < x < 2$ puisque u est strictement croissante on aura $u(x) < u(2) < 0$

(ou calcul des limites)

pour $x > 3$, on aura $0 < u(3) < u(x)$

Donc $u(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$ avec $2 < \alpha < 3$

3) Puisque u strictement croissante avec $u(\alpha) = 0$

on a

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Partie B : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$ $\quad D_f =]0;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ Par produit et somme $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ Par somme $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x - 2) = -\infty$

Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$

2) f définie dérivable sur $]0;+\infty[$ comme

a) produit et somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{x-1}{x} \times \frac{1}{x}$

$= \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$

$x^2 > 0$
donc $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$

b)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

Donc f est décroissante sur $]0;\alpha]$
puis croissante sur $[\alpha;+\infty[$

Partie C : soit $\mathcal{C}'$ d'équation $y = \ln x$

1) $\boxed{f(x) - \ln x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x$

$x > 0$

$$= -\left(1 - \frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) + (2 - \ln x)$$

$$= (2 - \ln x)\left(-1 + \frac{1}{x} + 1\right)$$

$$= (2 - \ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{2 - \ln x}{x}$$

$f(x) - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow$ $2 - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\ln x = 2$

$\Leftrightarrow$ $x = e^2$

et $\ln e^2 = 2$

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en seul point $A(e^2 ; 2)$

2) $H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ $\quad \mathcal{D}_H =]0 ; +\infty[$

primitive de h / $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

alors $I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$= \left[2\ln x - H(x)\right]_1^{e^2}$$

$\begin{cases} H(e^2) = \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 = 2 \\ H(1) = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = 0 \end{cases}$

$$= \left(2\ln e^2 - 2\right) - 0$$

$$= 2$$

$I = \int_1^{e^2} f(x) - \ln x \,dx$

sur $[1 ; e^2]$ $x \mapsto f(x) - \ln x$ est continue et positive

$\begin{cases} f(x) - \ln x \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow \ 2 - \ln x \geqslant 0 \\ x > 0 \quad \Leftrightarrow \ 2 \geqslant \ln x \\ \Leftrightarrow \ e^2 \geqslant x \end{cases}$

donc I est l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ comprise entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (en unité d'aire)