Ex 1 : $A(0;4;1)$ $B(1;3;0)$ $C(2;-1;-2)$ $D(7;-1;4)$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$

il n'existe pas de réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires et A, B, C non alignés

Ils définissent le plan (ABC)

2) a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de Δ

$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{AB} = 2+1-3=0\\ \vec{u}\cdot\vec{AC} = 4+5-9=0\end{cases}$ $\left.\begin{matrix}\vec{u}\perp\vec{AB} \text{ et } \vec{u}\perp\vec{AC}\\ \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ non colinéaires}\end{matrix}\right\}$

donc Δ orthogonale au plan (ABC)

b) alors $\vec{u}$ vecteur normal au plan (ABC)

donc $2x - y + 3z + d = 0$

$A \in (ABC) \iff 0 - 4 + 3 + d = 0 \iff d = 1$

Le plan (ABC) a pour équation cartésienne

$$\boxed{2x - y + 3z + 1 = 0}$$

c) Δ passe par D donc une représentation paramétrique de Δ est $\boxed{\begin{cases}x = 7+2t\\ y = -1-t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z = 4+3t\end{cases}}$

d) Soit H le point d'intersection de Δ et du plan (ABC). Il s'agit de résoudre

$\begin{cases}x=7+2t\\ y=-1-t\\ z=4+3t \quad (t\in\mathbb{R})\end{cases}$ et $2x-y+3z+1=0$

soit $2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$

$\iff 14+4t+1+t+12+9t+1=0$

$\iff 28+14t=0 \iff t=-2$

donc $\boxed{H(3;1;-2)}$

ⓔ $\Delta \perp (ABC)$
$H \in \Delta \cap (ABC)$ } alors la distance de D au plan (ABC) est DH

$DH^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 56 \Rightarrow DH = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

3) ⓐ $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$
$\mathcal{P}_2 : x + 4y + 2 = 0$

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ vecteurs normaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires
(coordonnées non proportionnelles)
donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite

ⓑ Soit $d : \begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

$(-4t-2) + t + (3t+2) = 0$ donc $d \subset \mathcal{P}_1$
$(-4t-2) + 4 \times t + 2 = 0$ donc $d \subset \mathcal{P}_2$
Alors d est bien l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

ⓒ Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d
$\vec{u}$ vecteur normal au plan (ABC)
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -8 - 1 + 9 = 0$ donc $\vec{v} \perp \vec{u}$
alors $d \parallel (ABC)$

$I(-2 ; 0 ; 2) \in d$ $(t = 0)$
$2 \times (-2) - 0 + 3 \times 2 + 1 = -4 + 7 = 3$
$3 \neq 0$ alors $I \notin (ABC)$
d et (ABC) sont strictement parallèles
(non sécants)

Ex2 : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$ définie dérivable sur $]0;+\infty[$ 2

1) ⓐ $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 0} (1+\ln x) = -\infty$

Par quotient

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$

ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Par produit et somme

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

ⓒ L'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

2) ⓐ $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln x) \times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{-1-\ln x}{x^3}$

ⓑ $-1 - 2\ln x > 0 \iff -2\ln x > 1 \iff \ln x < \dfrac{-1}{2}$

$\iff x < e^{-1/2} \iff \boxed{x < \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$

$x \mapsto e^x$ continue strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$x^3 > 0$ sur $]0;+\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln x$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ⓒ Donc

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{e}{2}$	↘	0

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = f(e^{-1/2}) = \dfrac{1+\ln(e^{-1/2})}{(e^{-1/2})^2} = \dfrac{1/2}{1/e} = \dfrac{e}{2}$

3) a) $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1$

$\iff x = \frac{1}{e}$

$\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point $\boxed{A(1/e ; 0)}$

b) $f(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0 \iff x > \frac{1}{e}$

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f(x)$	||	$-$ 0 $+$	

4) a) $\underline{f \text{ continue positive sur}}$ $[1/e ; +\infty[$

donc $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)\,dx$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} n \geqslant 1 \\ \text{donc } n > \frac{1}{e} \end{array} \right.$

$I_2 = \int_{1/e}^{2} f(x)\,dx$

$\frac{1}{e} < 2$ par positivité de l'intégrale $\boxed{I_2 \geqslant 0}$

I_2 est l'aire (en u.a) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 1/e$ et 2.

Cette aire est majorée par celle du rectangle de dimensions $\left(2 - \frac{1}{e}\right)$ et $\frac{e}{2}$ $\underline{(\text{maximum de } f)}$

$\left(2 - \frac{1}{e}\right) \times \frac{e}{2} = e - \frac{1}{2}$ donc $\boxed{0 \leqslant I_2 \leqslant e - \frac{1}{2}}$

b) $F = \frac{-2 - \ln x}{x}$ primitive de f sur $]0 ; +\infty[$

donc $I_n = F(n) - F(1/e) = \frac{-2 - \ln n}{n} - \frac{-2 + \ln e}{1/e}$

$= \boxed{\frac{-2 - \ln n}{n} + e}$

c) $I_n = \frac{-2}{n} - \frac{\ln n}{n} + e$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\underline{\text{Par}}$ somme et produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{x} - \frac{\ln x}{x} + e \right) = e$

donc (I_n) $\underline{\text{converge vers } e}$ $\quad$ L'aire tend vers e u.a quand n devient de plus en plus $\underline{\text{grand}}$

Ex 3 : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n$ $(n\in\mathbb{N})$ ③

1) ⓐ

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

ⓑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble décroissante

2) ⓐ $P_n : u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

initialisation : pour $n=1$ $u_1 = 3{,}4$

$\frac{15}{4}\times 0{,}5 = \frac{15}{8}$ $\qquad u_1 > \frac{15}{8}$

donc la propriété est vraie au rang 1.

hérédité : supposons que P_k vraie pour $k\in\mathbb{N}^*$

alors $u_k \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^k$

or $u_{k+1} = \frac{1}{5}u_k + 3\times 0{,}5^k$

on a donc $u_{k+1} \geqslant \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4}\times 0{,}5^k\right) + 3\times 0{,}5^k$

soit $u_{k+1} \geqslant 0{,}5^k\left(\frac{3}{4}+3\right)$

d'où $u_{k+1} \geqslant 0{,}5^k \times \frac{15}{4}$ or $\frac{15}{4} > \frac{15}{8}$

on a alors $u_{k+1} \geqslant 0{,}5^k \times \frac{15}{8}$ $\left(= 0{,}5^k\times\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}\right)$

donc $\boxed{u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^{k+1}}$

Conclusion : $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ pour $n\geqslant 1$

ⓑ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n - u_n = \frac{-4}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n$

$(u_1 > u_0)$

pour $n\geqslant 1$ $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$ alors $\frac{-4}{5}u_n \leqslant -3\times 0{,}5^n$

donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$

ⓒ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0

donc convergente

en effet $\frac{15}{4}\times 0{,}5^n > 0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

3) Soit $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5^n \times 0{,}5$

$= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 5 \times 0{,}5^n$

$= \frac{1}{5}u_n - 2 \times 0{,}5^n = \frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0{,}5^n)$

$= \frac{1}{5}v_n$ et $v_0 = u_0 - 10 = 2 - 10 = -8$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/5$ de 1er terme $v_0 = -8$.

ⓑ alors $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$ $n \in \mathbb{N}$

et $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n = \boxed{10 \times 0{,}5^n - 8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

ⓒ $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

$-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}5)^n = 0$

Par Produits et Somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

4) Tant que $\boxed{u > 0{,}01}$ faire

n prend la valeur $\boxed{n+1}$

u prend la valeur $\boxed{\frac{1}{5} * u + 3 * 0{,}5^n}$

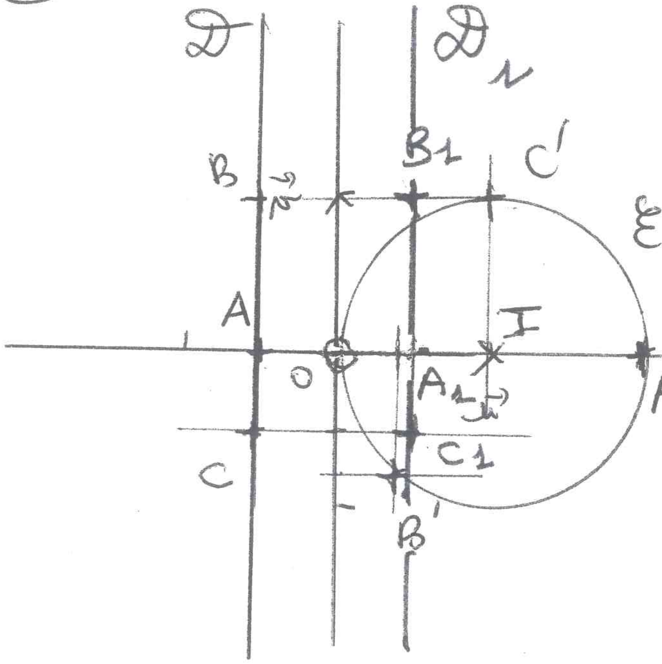
Fin Tant que

Ex4 : $\underset{(M)}{z} \xrightarrow{f} \dfrac{1}{z+1} = z' \ (M')$ (4)

$z \neq -1$

1) $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ $B\left(-\frac{1}{2}+i\right)$ $C\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

a)



b) $z'_A = \dfrac{1}{z_A+1} = \dfrac{1}{-1/2+1} = \dfrac{1}{1/2} = 2$

$A'(2)$

$\mathcal{E}_2 = \mathcal{C}$

$z'_B = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+i} = \dfrac{\frac{1}{2}-i}{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{\frac{1}{2}-i}{5/4}$

$z'_B = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}-i\right)$

$\boxed{z'_B = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i} \to B'$

$z'_C = \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = 2\left(\dfrac{1}{1-i}\right)$

$= 2\left(\dfrac{1+i}{1+1}\right) = 1+i \to C'$

c) $\begin{cases} \overrightarrow{A'C'} \text{ a pour affixe } (-1+i) \\ \overrightarrow{A'B'} \text{ a pour affixe } \left(-\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i\right) \end{cases}$

$\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ non colinéaires (il n'existe pas de réel k ~~tel~~ que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$) donc A', B', C' non alignés

2) a) $\underset{(M)}{z} \xrightarrow{g} \underset{(M_1)}{z+1}$ $g(A) = A_1$, $g(B) = B_1$ et $g(C) = C_1$

b) g est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1

c) Soit $I(1)$ et soit $M(z)$

$|z-1| = |z| \iff IM = OM \iff M$ est sur la médiatrice de $[OI]$.

$\iff M$ est sur la droite d'équation $x = 1/2$

C'est donc $\mathcal{D}_1$

$\mathcal{D} : x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{g} \mathcal{D}_1 : x = \frac{1}{2}$

3) $z \xmapsto{h} \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$

(M) $\quad$ (M_2)

ⓐ $\begin{cases} \dfrac{1}{z_{A_1}} = \dfrac{1}{1/2} = 2 = z_{A'} \\ \dfrac{1}{z_{B_1}} = \dfrac{1}{1/2 + i} = \dfrac{\frac{1}{2} - i}{5/4} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2} - i\right) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5} i = z_{B'} \\ \dfrac{1}{z_{C_1}} = \dfrac{1}{1/2 - 1/2\, i} = 2\left(\dfrac{1}{1-i}\right) = 2\, \dfrac{1+i}{2} = 1 + i = z_{C'} \end{cases}$

on a bien $\underline{h(A_1) = A'}$, $\underline{h(B_1) = B'}$ et $\underline{h(C_1) = C'}$

ⓑ $z \neq 0$ $\quad \left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff \left|\dfrac{1-z}{z}\right| = 1 \iff \dfrac{|1-z|}{|z|} = 1$

$\iff |1 - z| = |z| \iff \boxed{|z - 1| = |z|}$

ⓒ $M(z) \in \mathcal{D}_1 \iff |z - 1| = |z|$

$z \neq 0$ $\qquad \iff \left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff IM_2 = 1$

Soit $\mathcal{E}_2 = h(\mathcal{D}_1)$ $\qquad \iff M_2 \in \mathcal{C}(I; 1) \setminus \{0\}$

image de $\mathcal{D}_1$ par h $\qquad$ donc $\underline{\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{C}(I; 1) \setminus \{0\}}$

On admet que $\underline{\mathcal{E}_2 = \mathcal{C}(I; 1) \setminus \{0\}}$

4) $z \xmapsto{g} z + 1 \xmapsto{h} \dfrac{1}{z+1}$ $\qquad$ f est la composée de g suivie de h

$z \neq -1$

f

L'image de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$

a pour image $\mathcal{C} \setminus \{0\}$