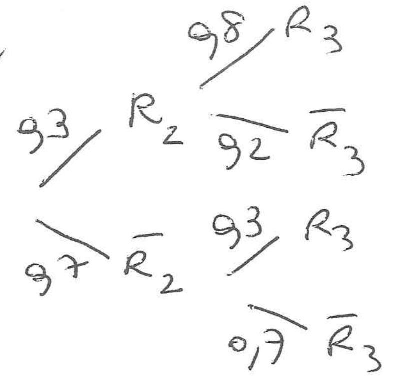
Ex1 : 1) a)

$p_3 = p(E_3)$

$p_1 = 0$



0,25

formule des probabilités totales :

$p_3 = p(R_2 \cap R_3) + p(\overline{R_2} \cap R_3)$

0,25 $= 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,3$

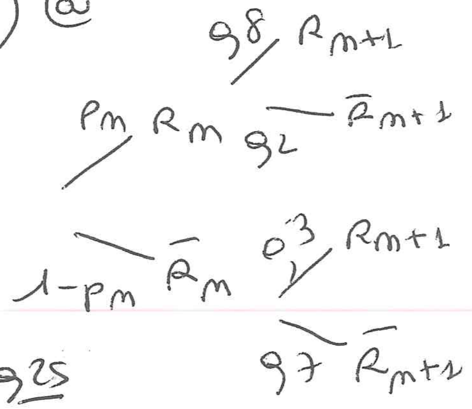
$= 0,24 + 0,21 = 0,45$

La probabilité que l'employé soit en retard le 3ème jour est de 0,45. 0,25

b) $p_{\overline{R_3}}(\overline{R_2}) = \dfrac{p(\overline{R_3} \cap \overline{R_2})}{p(\overline{R_3})} = \dfrac{0,7 \times 0,7}{1 - p_3} = \dfrac{0,49}{0,55} = \dfrac{49}{55} \simeq 0,891$

0,5

2) a)



0,25

b) $n \geq 1$ $p_{n+1} = p(R_{n+1})$

$p_{n+1} = p(R_n \cap R_{n+1}) + p(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$ probabilités totales

$= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,3$

0,5 $= \boxed{0,5\, p_n + 0,3}$

3) $\boxed{v_n = p_n - 0,6}$ $n \geq 1$

a) $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,6$

$= 0,5\, p_n + 0,3 - 0,6$

$= 0,5\, p_n - 0,3$

$= 0,5(p_n - 0,6)$

0,5 $= 0,5 \times v_n$

0,25

de plus $v_1 = p_1 - 0,6 = -0,6$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison 0,5 de premier terme $v_1 = -0,6$

0,25 b) $v_n = v_1 \times 0,5^{n-1} = \boxed{(-0,6) \times 0,5^{n-1}}$ donc $\boxed{p_n = 0,6 - 0,6 \times 0,5^{n-1}}$ $n \geq 1$

c) $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$

Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,6}$

(p_n) converge vers 0,6

0,5

4) l'algorithme calcule les termes de la suite p_n tant $|p_n - 0{,}6| < 10^{-k}$

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante et converge vers $0{,}6$

0,5 donc l'algorithme s'arrête $\forall k$ choisi

et l'algorithme affiche J le plus petit rang tel que $p_J \geqslant 0{,}6 - 10^{-k}$

On se rapproche de la limite à 10^{-k} près.

Ex 2 : Partie A $f(x) = ax + b + \dfrac{x}{e^x}$ $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$A(0;1) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$ 0,25

f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = a + \dfrac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = a + \dfrac{1-x}{e^x}$ 0,75

(AB) tangente à $\mathcal{C}_f$ en A de coefficient directeur 2

donc $f'(0) = 2 \Leftrightarrow a + \dfrac{1}{1} = 2 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

Alors $\boxed{f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}}$

Partie B : 1) $\boxed{g(x) = 1 - x + e^x}$ $D_g = \mathbb{R}$

g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\boxed{g'(x) = -1 + e^x}$ 0,25

$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 + e^x \geqslant 0$ 0,25

$\Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

car $x \mapsto e^x$ continue ~~strictement~~ croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

0,25 $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty$

Par Somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$

$g(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right) \quad x \neq 0$ 0,5

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Par somme $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ Par produit $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

2) 2 est le minimum pour g atteint en $x=0$

0,25 donc $g(x) \geq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $\boxed{g(x) > 0}$

3) $\lim_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$

0,25 $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ Par quotient $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ Par somme $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Par quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ Par somme $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

0,25 $\left(\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right)$ or $\lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$

0,5 4) $\boxed{f'(x) = 1 + \frac{1-x}{e^x}} = \frac{e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} = \boxed{e^{-x} g(x)}$

5) $g(x) > 0$
$e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f'(x) > 0}$

0,25 Alors

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

6) • f continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0,75 D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$

$f(-0{,}41) < 0$
$f(-0{,}40) > 0$ } donc $\boxed{-0{,}41 < \alpha < -0{,}40}$

0,25

7) $\mathcal{D} : y = x+1$ coefficient directeur 1

a) On veut une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à $\mathcal{D}$
donc il s'agit de résoudre $f'(x) = 1$

0,5
$$\begin{cases} f'(x) = 1 \iff 1 + \dfrac{1-x}{e^x} = 1 \iff \dfrac{1-x}{e^x} = 0 \iff x = 1 \\ f(1) = 2 + \dfrac{1}{e} = 2 + e^{-1} \end{cases}$$

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à $\mathcal{D}$
en $E(1 ; 2+e^{-1})$

b) $f(x) - (x+1) = \dfrac{x}{e^x}$ $\quad e^x > 0$

donc $f(x) - (x+1)$ est du signe de x.

- pour $x < 0$: $f(x) < x+1$ $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathcal{D}$

0,5
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ se coupent en $(0 ; 1)$
- pour $x > 0$: $f(x) > x+1$ $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de $\mathcal{D}$

Ex3 : $f(z) = z^2 + 2z + 9 \qquad z \in \mathbb{C}$

1) $\boxed{f(-1+i\sqrt{3})} = (-1+i\sqrt{3})^2 + 2(-1+i\sqrt{3}) + 9$
$= 1 - 2\sqrt{3}i - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

0,5

2) $f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0$ deux solutions
$\Delta = 4 - 16 = -12$
$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$z_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}\,i}{2} = \boxed{-1-\sqrt{3}\,i}$

$\boxed{z_2 = -1+\sqrt{3}\,i}$ $\quad S = \{z_1 ; z_2\}$

0,5

$|z_1|^2 = 1 + 3 = 4 \iff |z_1| = 2$

0,5 $z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

$|z_2| = 2$ et $z_2 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times 2 = 2e^{i2\pi/3}$

+ graphique 0,5 A d'affixe $(-1+\sqrt{3}\,i)$ et B d'affixe $(-1-\sqrt{3}\,i)$

3) $f(z) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$\iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + (9-\lambda) = 0$

$\Delta_\lambda = 4 - 4(9-\lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$

« $f(z) = \lambda$ » admet 2 solutions complexes conjuguées $\iff \Delta_\lambda < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$

0,5 $\underline{\lambda \in]-\infty ; 8[} \iff$ l'équation $f(z) = \lambda$ admet 2 solutions complexes conjuguées

4) $(F) = \{ M \text{ d'affixe } z \,/\, |f(z) - 8| = 3$

$$f(z) - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$$

$$M(z) \in (F) \iff |(z+1)^2| = 3 \iff |z+1|^2 = 3$$

0,75
0,25 $$\iff |z+1| = \sqrt{3}$$

donc (F) est le cercle de centre Ω d'affixe (-1) de rayon $\sqrt{3}$.

5) ⓐ $z = x + iy$ alors $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\, i$

$$f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi + 2(x + iy) + 9$$

0,25 $$= (x^2 - y^2 + 2x + 9) + i(2xy + 2y)$$

ⓑ $(E) = \{ M \text{ d'affixe } z \,/\, f(z) \text{ réel} \}$

$$M(z) \in (E) \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0$$

0,5
0,25 $$\iff y = 0 \text{ ou } x = -1$$

(E) est la réunion des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations $y = 0$ et $x = -1$

6) Il s'agit de résoudre $|f(z) - 8| = \sqrt{3}$ et $\begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$

soit $|z+1| = \sqrt{3}$ et $\begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$

1,5

pour $y = 0$, $z = x$ et $|z+1| = \sqrt{3} \iff |x+1| = 3$

$$\iff x = \sqrt{3} - 1 \text{ ou } x = -\sqrt{3} - 1$$

pour $x = -1$, $z = -1 + y$ et $|z+1| = \sqrt{3} \iff |y| = \sqrt{3}$

$$\iff y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3}$$

(E) et (F) se coupent en I d'affixe $(\sqrt{3} - 1)$, J d'affixe $(-\sqrt{3} - 1)$
A d'affixe $-1 + \sqrt{3}\, i$ et B d'affixe $(-1 - \sqrt{3}\, i)$

EX 4 : Partie A

On pose $\boxed{t = \ln x} \Leftrightarrow e^t = x \qquad x > 0$

alors $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{t}{e^t} = \dfrac{1}{\frac{e^t}{t}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty \end{array}\right\}$ Par composition et quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$

Partie B $\boxed{f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}}$ $\qquad \mathcal{D}_f = [1 ; +\infty[$

1) $g(x) = x^2 - 1 + \ln x \qquad \mathcal{D}_g = [1 ; +\infty[$

dérivable sur $[1 ; +\infty[$ comme somme 0,25

$g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ sur $[1 ; +\infty[$ 0,25

donc g strictement croissante 0,25

or $g(1) = 0$ donc $\boxed{g(x) \geq 0}$ 0,25 $\underline{1}$

2) ⓐ f dérivable sur $[1 ; +\infty[$ comme quotient et somme de fonctions dérivables sur $[1 ; +\infty[$

$f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = 1 - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$

$= \dfrac{g(x)}{x^2}$ 0,5

ⓑ $\left.\begin{array}{l} x^2 > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$ et f croissante 0,25

ⓒ $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x} \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ 0,25

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0 \qquad \mathcal{D} : y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

ⓓ $x > 0$ donc $f(x) - x$ du signe de $(-\ln x)$

or $x \geq 1$ donc $\ln x \geq 0$ et $(-\ln x) \leq 0$

donc $\mathcal{C}$ est toujours au-dessous de $\mathcal{D}$ 0,5

3) $k \geqslant 2$ entier

ⓐ $M_k \in \mathcal{C}$ donc $M_k(k\,;f(k))$

soit $\boxed{M_k\left(k\,;\,k-\dfrac{\ln k}{k}\right)}$ 0,5

$N_k \in \mathcal{D}$ donc $\boxed{N_k(k\,;k)}$

ⓑ $M_kN_k^2 = (k-k)^2 + \left(k - \dfrac{\ln k}{k} - k\right)^2 = \left(-\dfrac{\ln k}{k}\right)^2$

$= \left(\dfrac{\ln k}{k}\right)^2$

$k \geqslant 2$ donc $\dfrac{\ln k}{k} > 0$ alors $M_kN_k = \dfrac{\ln k}{k}$ 0,5

ⓒ Variables — K entier naturel ; D réel positif

Initialisation — K prend la valeur 2

D prend la valeur $(\ln K / K)$

Traitement — Tant que $D > 10^{-2}$

K prend la valeur K+1

D prend la valeur $(\ln K/K)$

fin Tant que

0,75

Sortie — Afficher K