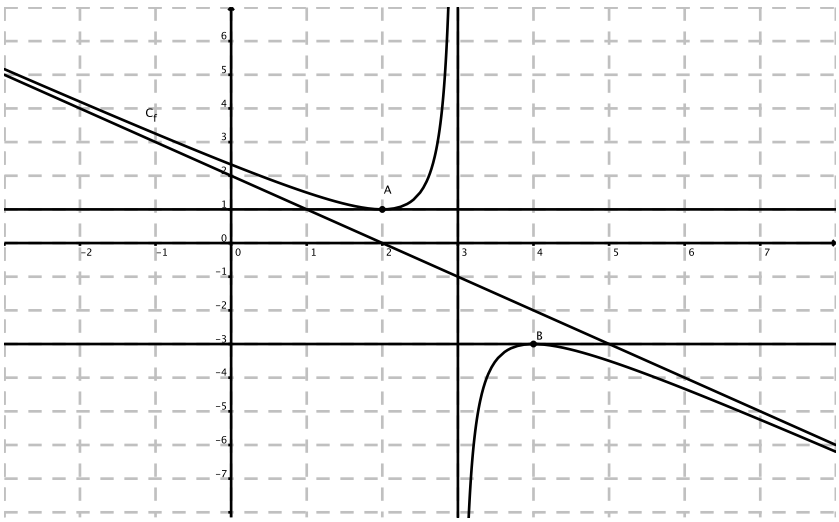
Correction ex n°42 p69

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. $\mathscr{C}$ passe par $A(2;1)$ donc $f(2) = 1$, c'est-à-dire $2a + b + 1 = 1$, ou encore $2a + b = 0$.
   De plus $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en A donc $f'(2) = 0$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, et $f'(x) = a + \dfrac{1}{(3-x)^2}$, donc $f'(2) = 0 \Longleftrightarrow a + 1 = 0$, c'est-à-dire $a = -1$.
   Au final $a = -1$ et $b = 2$, donc
   $$f(x) = -x + 2 + \frac{1}{3-x}$$
2. (a) Soit Δ la droite d'équation $y = -x + 2$; alors $f(x) - (-x + 2) = \dfrac{1}{3-x}$
   Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$, de même en $-\infty$
   donc Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Si $x < 3$, on a $\dfrac{1}{3-x} > 0$ et si $x > 3$, on a $\dfrac{1}{3-x} < 0$
   donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $]-\infty; 3[$ puis $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ sur $]3; +\infty[$.
3. $\lim_{x\to3}(-x + 2) = -1$
   $\lim_{x\to3^-}(3 - x) = 0^+$ et $\lim_{x\to3^+}(3 - x) = 0^-$
   Par quotient, $\lim_{x\to3^-} \dfrac{1}{3-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to3^+} \dfrac{1}{3-x} = -\infty$
   $$\text{Par somme, } \lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty \quad \text{ et } \lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$$
   La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
4. $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{(3-x)^2} = \dfrac{-(3-x)^2 + 1}{(3-x)^2} = \dfrac{(1+3-x)(1-3+x)}{(3-x)^2} = \dfrac{(4-x)(x-2)}{(3-x)^2} = \dfrac{-x^2+6x-8}{(3-x)^2}$
   Or $(3-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 6x - 8$.

x	$-\infty$		2			3			4		$+\infty$
$a = -1$ $f'(x)$	s.de a	-	0	+	s.de -a	$\Vert$	s.de -a	+	0	-	s.de a
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

5.