

Bac Blanc de Mathématiques spécialité TES - Février 2010

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : pour chaque question, une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève de point. Si la somme des points de cet exercice est négative, la note est ramenée à 0.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}\right)$ est égale à :

Réponse A : $+\infty$

Réponse B : 0

Réponse C : $-\infty$

2. Si f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2 \ln x - 3x + 5$ alors dans un repère du plan, une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1 est :

Réponse A : $y = -x + 2$

Réponse B : $y = -x + 3$

Réponse C : $y = -3x - 2$

3. $\ln(1 - x) \leq 0$ est équivalente à :

Réponse A : $x \in [0 ; +\infty[$

Réponse B : $x \in [0 ; 1[$

Réponse C : $x \in]-\infty ; 1]$

4. La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 2$ a pour primitive, la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

Réponse A : $F(x) = x \ln(x)$

Réponse B : $F(x) = x \ln(x) - x$

Réponse C : $F(x) = x \ln(x) + x$

Exercice 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Sur une population donnée, abonnée à deux opérateurs téléphoniques A et B, on considère que, chaque année, 40 % des abonnés à l'opérateur A le quitte pour l'opérateur B et 10 % des abonnés à l'opérateur B le quitte pour l'opérateur A. On néglige les nouveaux abonnés.

On suppose de plus qu'en 2005, 25 % de cette population est abonnée à l'opérateur A.

On note :

- a_n la proportion des abonnés à l'opérateur A l'année $2005 + n$
- b_n la proportion des abonnés à l'opérateur B l'année $2005 + n$
- E_n la matrice $(a_n \quad b_n)$, correspondant à l'état probabiliste l'année $2005 + n$.

Partie A

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation. En déduire la matrice de transition, notée M.
2. (a) Préciser E_0 .
(b) Calculer E_1 en faisant apparaître vos calculs.
(c) Déterminer la répartition prévisible de cette population en 2013. *On pourra utiliser la calculatrice et on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.*
(d) Soit E la matrice $(a \quad b)$ où a et b sont deux réels positifs tels que $a + b = 1$.
Déterminer a et b tels que $E = E \times M$. Interpréter ce résultat.

Partie B

1. Montrer que $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1$.
2. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = a_n - 0,2$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - (b) En déduire l'expression de u_n puis de a_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Un site Internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères. Pour chaque objet, la durée des enchères dure une semaine. Si une annonce reçoit une enchère, alors la vente de l'objet est obligatoire à la fin des enchères et ce, même si le vendeur juge le prix de vente trop peu élevé.

Sur ce site, une étude statistique a montré que :

- $\frac{3}{5}$ des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final ;
- $\frac{1}{3}$ des annonces reçoit une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet ;
- les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son objet de la vente.

On choisit au hasard une annonce mise en ligne sur le site. On note :

- L : l'événement « l'annonce reçoit une première enchère le lendemain de sa parution » ;
- T : l'événement « l'annonce reçoit une première enchère au bout de trois jours » ;
- A : l'événement « l'annonce ne reçoit aucune enchère » ;
- S : l'événement « le vendeur est satisfait du prix de vente final de son objet » et \bar{S} son événement contraire.

1. Traduire la situation par un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa parution et que le vendeur soit satisfait du prix de vente final.
3. Démontrer que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est 0,64.
4. Un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur. Quelle est la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce (le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au centième) ?
5. Marc a mis en vente le même jour trois jeux vidéo identiques sur ce site. On suppose que les déroulements des enchères sont indépendants les uns des autres.
(les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis au millième).
 - (a) Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente de ses trois jeux vidéo.
 - (b) Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente d'au moins deux de ces jeux vidéo.

Exercice 4

6 points

Commun à tous les candidats.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + 2x^2 - 3$.

Le tableau de variations de la fonction g est donné ci-dessous :

	x	0	α	$+\infty$
g		$-\infty$	θ	$+\infty$

En utilisant une calculatrice, on a obtenu $\alpha \approx 1,19$.

Dresser le tableau donnant le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} + 2x - 5.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 - Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à \mathcal{C}_f .
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
- Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
 - Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x supérieur ou égal à e.

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Compléter le graphique donné en annexe.
5. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

- Calculer la dérivée h' de h .

- En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}h'(x) + 2x - 5, \text{ trouver une primitive } F \text{ de la fonction } f \text{ sur l'intervalle }]0; +\infty[.$$

- Calculer $\int_e^4 f(x) dx$ (on donnera une valeur décimale arrondie au dixième).

Interpréter graphiquement le résultat.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Nom : Classe :

