

# Devoir de mathématiques n° 7 - TES

2 février 2009 - 1H

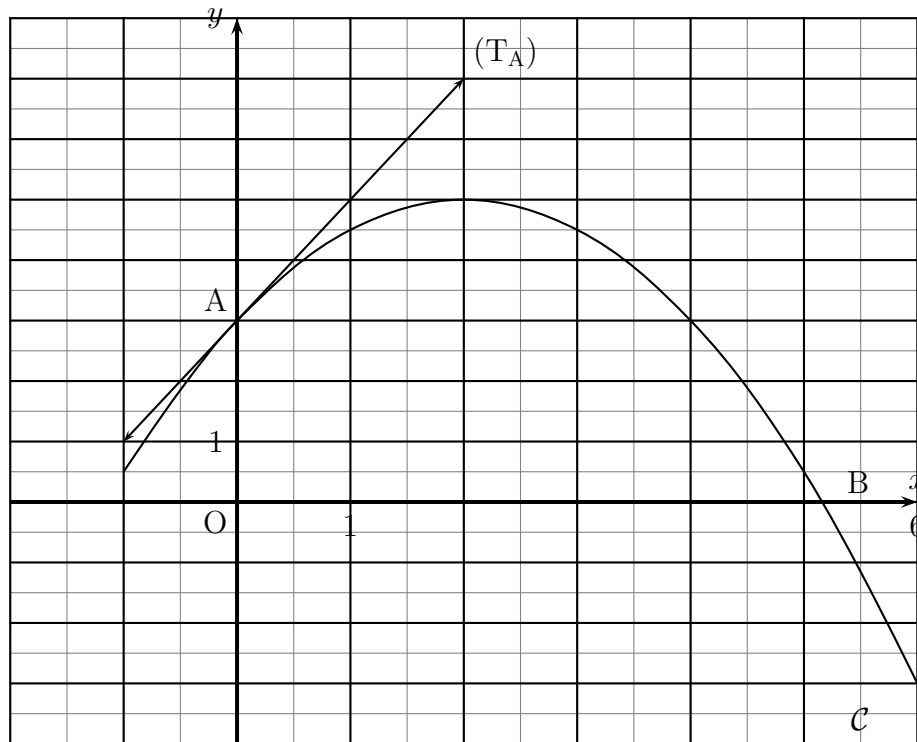
## Exercice 1

( 10 points )

La courbe  $\mathcal{C}$  représente, dans le plan muni d'un repère orthogonal, une fonction  $f$  définie dans l'intervalle  $[-1 ; 6]$ . On sait que la courbe  $\mathcal{C}$  :

- coupe l'axe des ordonnées au point  $A$  d'ordonnée 3, et l'axe des abscisses au point  $B$  d'abscisse  $b$ ;
- admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 2;
- admet la droite  $T_A$  pour tangente au point  $A$ .

### Partie A : Etude graphique de la fonction $f$



1. Lire graphiquement :  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(5)$  et  $f(6)$ .
2. Résoudre graphiquement sur  $[-1 ; 6]$  :      a)  $f(x) = 0$       b)  $f(x) \geq \frac{1}{2}$
3. Déterminer graphiquement :  $f'(0)$  et  $f'(2)$ .
4. Résoudre graphiquement sur  $[-1 ; 6]$  :  $f'(x) > 0$ .

### Partie B : Etude de la fonction $g = \ln f$

On étudie maintenant la fonction  $g$  qui à  $x$  associe  $g(x) = \ln[f(x)]$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

1. Préciser l'intervalle de définition  $I$  de la fonction  $g$ .
2. Déterminer la limite de la fonction  $g$  quand  $x$  tend vers  $b$ .
3. Etudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $I$ ; dresser son tableau de variations.
4. Calculer  $g'(0)$  puis  $g'(2)$ .
5. Résoudre dans  $I$ , l'inéquation  $g(x) \geq -\ln 2$ .

**Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire  $g$**  définie sur  $]2; 20]$  par

$$g(x) = x - 2 - 2 \ln(x)$$

1. Etudier les variations de la fonction  $g$  et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que la fonction  $g$  s'annule exactement une fois sur  $]2; 20]$ ; indiquer la valeur arrondie au dixième de ce nombre. En déduire le signe de la fonction  $g$  sur  $]2; 20]$ .

**Partie B : Etude de la fonction  $f$**  définie sur  $]2; 20]$  par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x - 2}$$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal;  $\mathcal{C}$  désigne la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Montrer que la dérivée  $f'$  a le même signe que  $g$  sur  $]2; 20]$ ; en déduire les variations de  $f$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en 2 et interpréter graphiquement, puis dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. Prouver qu'il existe un unique point de la courbe  $\mathcal{C}$ , où la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Construire  $\mathcal{C}$  dans le repère ci-dessous.

