Devoir de Mathématiques N^o 7 (1/2h)

Exercice 1 (10 pts) : Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 3u_n + 1$$

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est entier.

2,5 1. Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.

2 a) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.

2,5 b) En déduire que u_{2022} est divisible par 7.

3. a) Sans justification, compléter le tableau suivant :

1

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5					

1,5 b) En déduire que, pour tout entier naturel n,
si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

0,5 c) Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?

Bonus :

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors u_p est premier. »
2. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$
3. Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n)

$\begin{cases} u_0 = 0 \quad \text{pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

on admet que $u_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Les termes de la suite (u_n) sont alternativement <u>pairs et</u> impairs

1) <u>Soit u_n pair</u>

alors $\exists k \in \mathbb{N} / u_n = 2k$

alors $u_{n+1} = 3(2k)+1$

$= 6k+1$ impair

$= 2(3k)+1$

<u>Soit u_n impair</u>

alors $\exists k \in \mathbb{N} / u_n = 2k+1$

alors $u_{n+1} = 3(2k+1)+1$

$= 6k+4$

$= 2 \times \underbrace{(3k+1)}_{\in \mathbb{N}}$ pair

2) on admet que $\underline{2u_n = 3^n - 1}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $n \in \mathbb{N}^*$ $3^1 = 3$ $3 \equiv 3\ (7)$

Par compatibilité $3^2 = 9$ $3^2 \equiv 2\ (7)$
avec les produits $3^3 \equiv 3 \times 2\ (7) \equiv 6\ (7)$
et les puissances $3^4 \equiv (3^2)^2\ (7) \equiv 4\ (7)$

$3^5 \equiv 3^3 \times 3^2\ (7) \equiv 12\ (7) \equiv 5\ (7)$

$3^6 \equiv 3^4 \times 3^2\ (7) \equiv 4 \times 2\ (7) \equiv 1\ (7)$

le plus petit entier n non nul / $3^n \equiv 1\ (7)$ est $\boxed{n = 6}$

ⓑ $2022 = 6 \times 337$ donc $3^{2022} \equiv (3^6)^{337}\ (7) \equiv 1\ (7)$
par compatibilités avec les puissances

or $2u_{2022} = 3^{2022} - 1$
donc $2u_{2022} \equiv 3^{2022} - 1\ (7) \equiv 0\ (7)$
soit $u_{2022} \equiv 0\ (7)$ (2 ne divise pas 7)
donc u_{2022} est divisible par 7

3) ⓐ

$n/5$	0	1	2	3	4
$3n+1 \equiv \dots\ (5)$	1	4	2	0	3

ⓑ soit $u_n \equiv 4\ (5)$ $u_{n+1} = 3u_n + 1$
donc d'après le tableau $u_{n+1} \equiv 3\ (5)$
et ainsi de suite $u_{n+2} \equiv 0\ (5)$
puis $u_{n+3} \equiv 1\ (5)$
enfin $u_{n+4} \equiv 4\ (5)$

ⓒ on a un cycle d'après la question précédente, le reste de la division euclidienne par 5 n'est jamais 2