

Devoir de Mathématiques N° 5 (40 min)

Exercice 1 (4 pts) : Déterminer si les nombres suivants sont premiers ou composés

- 4,5
/
- 229
 - $A = 4n^2 - 1$ pour tout entier naturel $n \geq 2$
 - $B = n^2 - 6n + 5$ avec $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 (2 pts) :

- 2
/
- Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 156.
 - Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 156, puis écrire la liste de ces diviseurs.
 - En déduire l'entier naturel n tel que $n(n+1) = 156$.

Exercice 3 (4 pts) : Soit $F_n = 4n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$

- 3,5
- Trouver cinq entiers n tels que F_n soit un nombre premier.
 - Pour ces cinq nombres F_n , vérifier un théorème de Fermat : "Tout nombre premier de la forme F_n est la somme des carrés de deux entiers."
 - Soient x, x', y et y' quatre entiers; développer : $(xx' + yy')^2 + (xy' - yx')^2$
 - En déduire que si deux entiers sont somme de deux carrés, alors leur produit aussi est la somme de deux carrés.

Ex 3 : $F_m = 4m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$)

1) @

$$\begin{cases} F_1 = 4 + 1 = 5 \\ F_3 = 12 + 1 = 13 \\ F_4 = 16 + 1 = 17 \\ F_7 = 28 + 1 = 29 \\ F_9 = 36 + 1 = 37 \end{cases}$$

pour $m = 1, 3, 4, 7$ et 9
 F_m est premier

0,5

$$\begin{cases} 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2 \\ 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \\ 17 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2 \\ 29 = 25 + 4 = 5^2 + 2^2 \\ 37 = 36 + 1 = 6^2 + 1^2 \end{cases}$$

et est vérifié

1,5

$x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$

2) @

$$\begin{aligned} (xx' + yy')^2 + (xy' - yx')^2 &= (xx')^2 + 2xx'yy' + (yy')^2 \\ &\quad + (xy')^2 - 2xy'yx' + (yx')^2 \\ &= (xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (yx')^2 \end{aligned}$$

0,5

soit $a = x^2 + y^2$
et soit $b = x'^2 + y'^2$ $a, b \in \mathbb{N}$

alors $ab = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$

$$\begin{aligned} &= (xx')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2 \\ &\quad + (yy')^2 \\ &= (xx' + yy')^2 + (xy' - yx')^2 \end{aligned}$$

somme de 2 carrés

Ex 1 : 1) $\sqrt{229} \approx 15,1$

9,5 induction

1,5

229 impair

$2+2+9 = 13$

ni se divise ni par 0 ni par 5

$229 = 7 \times 32 + 5$

$229 = 11 \times 20 + 9$ 1

$229 = 13 \times 17 + 8$

donc 229 est un nombre premier

229 n'est ni divisible

par 2, ni par 3, ni par 5,

ni par 7, ni par 11,

ni par 13

2) $A = 4m^2 - 1 = (2m+1)(2m-1)$

$m \in \mathbb{N}, m \geq 2$

A premier $\Leftrightarrow 2m-1 = 1$

et $(2m+1)$ premier

$\Leftrightarrow m=1$ et $2m+1=5$ ok

$(2m-1) < (2m+1)$

ou $m \geq 2$

donc A est toujours composé pour $m \geq 2$

3) $B = m^2 - 6m + 5 = (m-1)(m-5) = (1-m)(5-m)$ ($m \in \mathbb{N}$)

B premier \Leftrightarrow $m-5=1$ et $(m-1)$ premier

ou $1-m=1$ et $(5-m)$ premier

$\Leftrightarrow m=6$ et $m-1=6-1=5$ ok

ou $m=0$ et $5-m=5-0=5$ ok

B premier si $m=0$ et si $m=6$ ($B=5$)

si $m \in \{1; \dots; 5\}$ alors $B < 0$

si $m \geq 7$ alors B est composé

Ex 2: 1)
$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & 13 \end{array}$$

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$

donc 156 a $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

2) diviseurs

$\mathcal{D}_{156} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78; 156\}$

1) $156 = 12 \times 13$ la solution de $m(m+1) = 156$ est 12