Correction du devoir n°4 - TSpé

$N_p = \underbrace{11\cdots1}_{p \text{ chiffres } 1} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k = 1 + 10 + 100 + \cdots + 10^{p-1}$

$(p \in \mathbb{N}^*)$

(A) 1) N_p se termine par 1 donc impair
N_p ne se termine pas par 0 ni 5.
donc N_p n'est ni divisible par 2 ni par 5

2) par 3 ?

ⓐ $10^0 = 1$ donc $10^0 \equiv 1 (3)$
$10^1 = 10 = 3\times3+1$ donc $10^1 \equiv 1 (3)$
Par compatibilité avec les puissances
$10^j \equiv 1^j (3) \equiv 1 (3)$ $\forall j \in \mathbb{N}$

ⓑ par somme $N_p \equiv p \times 1 (3) \equiv p (3)$

ⓒ N_p est divisible par 3 $\iff N_p \equiv 0 (3)$
$\iff p \equiv 0 (3)$
$\iff$ p est un multiple de 3

3) par 7 ? $10^m \equiv a (7)$ $a \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

ⓐ

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	-1	-3	-2	1

ⓑ $p \in \mathbb{N}^*$

- $p = 6q + r$ $q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 6$

$10^p = (10^6)^q \times 10^r$ loi puissances et produit
$10^p \equiv 1^q \times 10^r (7) \equiv 10^r (7)$
avec $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

D'après le tableau, la seule valeur possible pour r est 0 donc $p = 6q$ $(q \neq 0)$

- si $p = 6q$ $(q \in \mathbb{N}^*)$, $10^p = (10^6)^q$
donc $10^p \equiv 1^q (7) \equiv 1 (7)$

Donc $10^p \equiv 1 (7) \iff$ p est un multiple de 6

ⓒ $N_p = 1 + 10 + \cdots 10^{p-1} = 10^0 + 10^1 + \cdots + 10^{p-1}$

somme des termes d'une suite géométrique de raison 10

Donc $N_p = \dfrac{1-10^p}{1-10} = \dfrac{1-10^p}{-9} = \dfrac{10^p - 1}{9}$

$p \in \mathbb{N}^*$

ⓓ $9N_p = 10^p - 1$

$7 \mid N_p \Rightarrow N_p \equiv 0\,(7) \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} 9N_p \equiv 0\,(7)$

On admet que $7 \mid 9N_p \Rightarrow 7 \mid N_p$

Donc $7 \mid N_p \Leftrightarrow 7 \mid 9N_p$

ⓔ $p \in \mathbb{N}^*$ $10^p \equiv 1\,(7) \Leftrightarrow p$ multiple de 6

or $10^p \equiv 1\,(7) \Leftrightarrow 10^p - 1 \equiv 0\,(7)$

$\Leftrightarrow 9N_p \equiv 0\,(7)$ d'après ⓓ

$\Leftrightarrow N_p \equiv 0\,(7)$

donc N_p est divisible par 7 $\Leftrightarrow$ p multiple de 6

③ 1) $n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 2$ avec $n^2 \equiv 1\,(10)$

ⓐ

$n \equiv \ldots\,(10)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots\,(10)$	0	1	4	9 (−1)	6 (−4)	5	6 (−4)	9 (−1)	4	1

ⓑ $n^2 \equiv 1\,(10) \underset{\text{d'après le tableau}}{\Leftrightarrow} n \equiv 1\,(10)$ ou $n \equiv 9\,(10) \equiv -1\,(10)$

$\Leftrightarrow n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$
$(m \in \mathbb{N})$

ⓒ si $n = 10m + 1$ alors $n^2 = 100m^2 + 20m + 1$
$= 20(5m^2 + m) + 1$

si $n = 10m - 1$ alors $n^2 = 100m^2 - 20m + 1$
$= 20(\underbrace{5m^2 - m}_{\in \mathbb{N}}) + 1$

Dans les 2 cas, on a bien

$$\boxed{n^2 \equiv 1\,(20)}$$

2) $p \in \mathbb{N} \,/\, p \geq 2$

$N_2 = 11 \quad N_2 \equiv 11 (20)$

$N_3 = 111 = 100 + 11 = 20 \times 5 + 11$

$N_4 = 1111 = 1100 + 11 = 20 \times 50 + 11$

$N_p = 20 \times 5 \times 10^{p-2} + 11$ donc $\boxed{N_p \equiv 11 (20)}$

3) on a vu que $n^2 \equiv 1 (10) \Rightarrow n^2 \equiv 1 (20)$

Un carré parfait qui a pour reste 1 dans la division euclidienne par 10 a pour reste 1 dans la division euclidienne par 20

$N_p \equiv 1 (10)$ se termine par 1

si N_p était un carré parfait, on aurait $N_p \equiv 1 (20)$

or $N_p \equiv 11 (20)$

donc N_p n'est pas un carré parfait

(Bonus) $N \in \mathbb{N}$

N impair non premier

$N = a^2 - b^2 \qquad a, b \in \mathbb{N}$

1) si $\begin{cases} a = 2k \\ b = 2k' \\ k, k' \in \mathbb{N} \end{cases}$ alors $N = 4k^2 - 4k'^2 = 2(\underbrace{2k^2 - 2k'^2}_{\in \mathbb{N}})$

nombre pair

si $\begin{cases} a = 2k+1 \\ b = 2k'+1 \end{cases}$ alors $N = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1$

$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1}_{\in \mathbb{N}})$

nombre pair

Donc a et b ne peuvent pas avoir la même parité

2) $N = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = p \times q$

$\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases} \in \mathbb{N}$

3) si $a = 2k$ alors $b = 2k'+1 \qquad k, k' \in \mathbb{N}$

donc $\begin{cases} p = a+b = 2k + 2k' + 1 = 2(k+k') + 1 \\ q = a-b = 2k - 2k' - 1 = 2(k-k'-1) + 1 \end{cases}$

ce sont des nombres impairs