Correction du dev 1 - TS spé

Exo 1 : $n \in \mathbb{N}$ / $(n-4) \mid (2n+3)$?

$(n-4) \mid (2n+3)$
$(n-4) \mid (n-4)$ } Par combinaisons linéaires

$(n-4) \mid (2n+3) - 2(n-4)$

soit $(n-4) \mid 11$ $\qquad \mathcal{D}_{11} = \{-11 ; -1 ; 1 ; 11\}$

$n-4 = -11 \iff n \cancel{=} -7$

$n-4 = -1 \iff n = 3$

$n-4 = 1 \iff n = 5$

$n-4 = 11 \iff n = 15$

$n \in \{3 ; 5 ; 15\}$

Exo 2 : $x, y \in \mathbb{Z}$ / $x^2 = y^2 + 13$?

$x^2 = y^2 + 13 \iff x^2 - y^2 = 13 \iff (x-y)(x+y) = 13$

$\mathcal{D}_{13} = \{-13 ; -1 ; 1 ; 13\}$

$\begin{cases} x - y = -13 \\ x + y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -14 \\ y = -1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = -7 \\ y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -13 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -7 \\ y = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 13 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 \\ y = -6 \end{cases}$

$S = \{(-7 ; -6) ; (-7 ; 6) ; (7 ; -6) ; (7 ; 6)\}$

Exo 3 : $n \in \mathbb{N}$

1) n impair alors $\exists k \in \mathbb{N} / \ n = 2k+1$

$n^2-1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1$

$= 4k^2 + 4k = 4\underbrace{(k^2+k)}_{\in \mathbb{N}}$

par définition $\underline{4 \mid (n^2-1)}$

2) Supposons que $4 \mid (n^2-1)$ — faux $n=0$: $n^2-1=-1$, $4 \nmid -1$

alors $\exists k \in \mathbb{N} / \ n^2-1 = 4k$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

or $n^2-1 = (n-1)(n+1)$

et $4k = 2 \times 2k$ pair

donc $n-1$ ou $n+1$ est pair

soit n impair

$\boxed{4 \mid (n^2-1) \Leftrightarrow n \text{ impair}}$ Réciproque vraie

Exo 4 : $a, b, c \in \mathbb{N}$

1) soit $2 \mid 4$ or $4 \nmid 2$ Faux

2) $a \mid a+b$; $a \mid a$ ($a \neq 0$) } par combinaison linéaire $a \mid (a+b) - a$

soit $a \mid b$ VRAI

3) 2 et 12 divisent 12 Faux

mais $24 = 2 \times 12$ ne divise pas 12

4) $a \mid b$ ($a \neq 0$) alors $\exists k \in \mathbb{N} / \ b = ka$

donc $\exists k \in \mathbb{N} / \ b^2 = k^2 a^2$

$k^2 \in \mathbb{N}$ donc $a^2 \mid b^2$

VRAI

5) $6 \mid 12$ et $12 = 4 \times 3$ Faux

mais $6 \nmid 4$ et $6 \nmid 3$