Correction du devoir n°10 – TS spé

Partie A 1) d'après l'énoncé, à la fin de chaque année n, $0{,}4\,a_n + 0{,}4\,b_n$ quittent l'association

20% restent avec le programme A et les nouveaux inscrits compensent les départs

donc $a_{n+1} = 0{,}2\,a_n + (0{,}4\,a_n + 0{,}4\,b_n) = \boxed{0{,}6\,a_n + 0{,}4\,b_n}$

60% restent avec le programme B et 40% de ceux qui étaient avec le programme A

donc $\boxed{b_{n+1} = 0{,}4\,a_n + 0{,}6\,b_n}$

Alors $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6\,a_n + 0{,}4\,b_n \\ b_{n+1} = 0{,}4\,a_n + 0{,}6\,b_n \end{cases}$ $\quad U_0 = (150 \quad 0)$

$U_n = (a_n \quad b_n)$ $(n \in \mathbb{N})$

soit $\boxed{U_{n+1} = U_n M}$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ 1

2) On veut montrer par récurrence que $U_n = (75 + 75 \times 0{,}2^n \quad 75 - 75 \times 0{,}2^n)$ $\quad n \in \mathbb{N}$ 2

Initialisation : pour $n = 0$

$75 + 75 \times 0{,}2^0 = 75 + 75 = 150$

$75 - 75 \times 0{,}2^0 = 75 - 75 = 0$ et $U_0 = (150 \quad 0)$ vrai pour $n = 0$

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ / $U_k = (75 + 75 \times 0{,}2^k \quad 75 - 75 \times 0{,}2^k)$

$U_{k+1} = U_k M = (75 + 75 \times 0{,}2^k \quad 75 - 75 \times 0{,}2^k)\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}6(75 + 75 \times 0{,}2^k) + 0{,}4(75 - 75 \times 0{,}2^k) & 0{,}4(75 + 75 \times 0{,}2^k) + 0{,}6(75 - 75 \times 0{,}2^k) \end{pmatrix}$

$= (75 + 0{,}2 \times 75 \times 0{,}2^k \quad 75 - 0{,}2 \times 75 \times 0{,}2^k)$

$= (75 + 75 \times 0{,}2^{k+1} \quad 75 - 75 \times 0{,}2^{k+1})$

vrai au rang $(k+1)$

Conclusion : c'est vrai pour $n = 0$ et héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_n = (75 + 75 \times 0{,}2^n \quad 75 - 75 \times 0{,}2^n)$

3) $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$

par produit et somme

$\lim\limits_{n \to +\infty} (75 + 75 \times 0{,}2^n) = 75 = \lim\limits_{n \to +\infty} (75 - 75 \times 0{,}2^n)$

À long terme, la répartition des effectifs va s'équilibrer entre les 2 programmes 1

Partie B

1) on choisit $a = 3$

ⓐ numéro 11 383

$S = 1 + 1 + 8 + 3 \times (1 + 3) = 10 + 3 \times 4 = 22$

$22 = 2 \times 10 + 2$, le reste de la division

1 euclidienne de 22 par 10 est 2 et non 3

Ce n'est pas un enfant inscrit à l'association

ⓑ $2008 \to 08c_3c_4c_5k$ $\quad S = 0 + c_3 + c_5 + 3 \times (8 + c_4)$

$2011 \to 11\, c_3c_4c_5k$ $\quad S' = 1 + c_3 + c_5 + 3 \times (1 + c_4)$

donc $\begin{cases} S = c_3 + c_5 + 3c_4 + 24 \\ S' = c_3 + c_5 + 3c_4 + 4 \end{cases}$ or $24 \equiv 4\ (10)$

2

donc S et S' ont le même reste dans la division euclidienne par 10. L'erreur n'est pas détectée

2) $c_3 \neq c_4$

ⓐ $S = c_1 + c_3 + c_5 + a(c_2 + c_4)$

$S' = c_1 + c_4 + c_5 + a(c_2 + c_3)$ on intervertit c_3 et c_4

on cherche $S \equiv S'\ (10)$

or $S \equiv S'\ (10) \iff c_3 + a(c_2 + c_4) \equiv c_4 + a(c_2 + c_3)\ (10)$

$\iff c_3 + ac_4 \equiv c_4 + ac_3\ (10)$

$\iff c_3 - ac_3 + ac_4 - c_4 \equiv 0\ (10)$

1,5 $\iff \boxed{(a-1)(c_4 - c_3) \equiv 0\ (10)}$

(b) Soient m et p entiers / $\begin{cases} 0 \leq m \leq 9 \\ 0 \leq p \leq 9 \end{cases}$

$mp \equiv 0 (10) \iff mp$ est un multiple de 10

soit m pair alors $p = 5$

soit $m = 5$ et p est un entier pair

1,5

donc $\underline{m \in \{0 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8\}}$

(c) la clé ne détecte pas l'interversion de c_3 et $c_4 \iff (a-1)(c_4 - c_3) \equiv 0 (10)$

donc la clé détecte l'interversion

$\iff (a-1)(c_4 - c_3) \not\equiv 0 (10)$

soit $a - 1 \in \{1 ; 3 ; 7\}$ $\qquad 1 \leq a \leq 9$

1

donc $\boxed{a \in \{2 ; 4 ; 8\}}$ $\qquad \iff 0 \leq a-1 \leq 8$