# Devoir de Mathématiques $N^o$ 7 (30 min)

**Exercice 1 (10 pts) :**

1. On considère l'équation $(E)$ : $87x + 31y = 2$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, vérifier que 87 et 31 sont premiers entre eux.
   b) En déduire un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $87x + 31y = 1$, puis déduire une solution particulière de l'équation $(E)$.
   c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(E)$ dans $\mathbb{Z}^2$.

2. Application : Trouver les points de la droite $\Delta$ d'équation $87x + 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

1) a) $87 = 31 \times 2 + 25$
$31 = 25 \times 1 + 6$
$25 = 6 \times 4 + 1$
$6 = 6 \times 1 + 0$

1

pgcd$(87;31)$ = pgcd$(31;25)$ = ...
= pgcd$(6;1) = 1$

donc 87 et 31 sont premiers entre eux

0,5

b) D'après le théorème de Bezout $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $87u + 31v = 1$

0,5

$1 = 25 - 6 \times 4$
$= 25 - (31 - 25) \times 4$
$= 5 \times 25 - 31 \times 4$
$= 5 \times (87 - 31 \times 2) - 31 \times 4$
$= 5 \times 87 - 14 \times 31$

1,5

donc $(5;-14)$ est solution de $87x + 31y = 1$.

donc $(10;-28)$ est une solution particulière de $(E)$

0,5

c) $87 \times 10 + 31 \times (-28) = 2$
$87 \times x + 31\, y = 2$

Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(E)$

donc $87(10-x) + 31(-28-y) = 0$
soit $87(10-x) = 31(28+y)$
alors $87 \mid 31(28+y)$
or $87 \wedge 31 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss $87 \mid (28+y)$

0,5

donc $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, 28 + y = 87k$ soit $\boxed{y = 87k - 28}$

on a donc $87(10-x) = 31 \times 87k$ 25

soit $10-x = 31k$ et $\boxed{x = 10-31k}$

Réciproquement, soit $(x;y) = (10-31k ; 87k-28)$
$k \in \mathbb{Z}$

alors $87 \times (10-31k) + 31(87k-28)$
$= 870 - 87\times31k + 31\times87k - 868 = 2$ 1
donc $(x;y)$ solution de (E)

Alors $S = \{ (10-31k ; 87k-28) / k \in \mathbb{Z} \}$

2) Application : $(\Delta) : 87x + 31y - 2 = 0$

Les coordonnées des points de $(\Delta)$ vérifient
$87x + 31y = 2$ donc solutions de (E)
On veut les coordonnées entières positives
telles que $0 \leq x \leq 100$

$$\begin{cases} y = 87k-28 \\ x = 10-31k \end{cases}$$

donc $0 \leq 10-31k \leq 100$
$\Rightarrow -10 \leq -31k \leq 90$
$k \in \{0 ; -1 ; -2\}$

pour $k = 0$ $x = 10$ et $y = \cancel{-28}$ ne convient pas
pour $k = -1$ $x = 41$ et $y = \cancel{-115}$
pour $k = -2$ $x = 72$ et $y = \cancel{-202}$

Pas de solution, aucun point ne convient.