Devoir de Mathématiques N^o 6 (30 min)

Exercice 1 (1 pts) :
Déterminer le PGCD de 858 et 910.

Exercice 2 (3 pts) :
Si on divise 4 294 et 3 521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme restes.

Quel est cet entier ?

Exercice 3 (2,5 pts) :
Montrer que pour tout entier relatif n, les entiers $(14n+3)$ et $(5n+1)$ sont premiers entre eux.

En déduire PGCD(87,31).

Exercice 4 (3,5 pts) : Soient $a = n - 1$ et $b = n^2 - 3n + 6$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que PGCD(a,b) est un diviseur de 4.
2. Déterminer selon les valeurs de n, le PGCD de a et b.
3. Pour quelles valeurs de n, $n \neq 1$, $\dfrac{b}{a}$ est-il un entier relatif ? (Bonus)

Ex 1 : $910 = 858 \times 1 + 52$ Pgcd(910 ; 858)
$858 = 52 \times 16 + 26$ = pgcd(858 ; 52)
$52 = 26 \times 2$ = Pgcd(52 ; 26) = 26
Algorithme d'Euclide

Ex 2 : Soit $m \in \mathbb{N}$ / $\begin{cases} 4\,294 = qm + 10 \\ 3\,521 = q'm + 11 \end{cases}$ $q, q' \in \mathbb{N}$ alors $m > 11$

$\begin{cases} qm = 4284 \\ q'm = 3510 \end{cases}$ m est un diviseur commun de 4284 et 3510

4284	2
2142	2
1071	3
357	3
119	7
17	17
1	

3510	2
1755	3
585	3
195	3
65	5
13	13
1	

$\begin{cases} 4284 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 17 \\ 3510 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 13 \end{cases}$

$\mathcal{D}(3510) \cap \mathcal{D}(4284)$
$= \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\}$
$m > 11$ donc $\boxed{m = 18}$

Vérification : $\begin{cases} 4\,294 = 18 \times 238 + 10 \\ 3\,521 = 18 \times 195 + 11 \end{cases}$

Ex3 : $n \in \mathbb{Z}$

$\text{Pgcd}(14n+3 ; 5n+1) = \text{Pgcd}(5n+1 ; 4n+1)$

(car $14n+3 = 2\times(5n+1) + (4n+1)$)

$= \text{Pgcd}(4n+1 ; n)$

(car $(5n+1)-(4n+1) = n$)

$= \text{Pgcd}(n ; 1) = 1$

(car $4n+1 = 4\times n + 1$)

$\begin{cases} n = 6 \\ 87 = 14\times 6+3 \\ 31 = 5\times 6+1 \end{cases} \Rightarrow \text{pgcd}(87;31) =$

donc $(14n+3)$ et $(5n+1)$ sont premiers entre eux. $\forall n \in \mathbb{Z}$

Ex4 : $a = n-1$ et $b = n^2-3n+6$ $(n \in \mathbb{Z})$

1) $n^2-3n+6 = (n-1)(n-2)+4$

donc $\text{pgcd}(a;b) = \text{pgcd}(a;4)$ donc divise 4

2) $\mathcal{D}_4 = \{-4;-2;-1;1;2;4\}$

$\text{pgcd}(a;b) = 4 \Leftrightarrow a \mid 4 \Leftrightarrow n-1 \mid 4 \Leftrightarrow n = 4k+1$

$\text{pgcd}(a;b) = 2 \Leftrightarrow a \mid 2 \Leftrightarrow \begin{cases} n-1 \mid 2 \\ \text{et } (n-1) \text{ ne divise pas } 4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 4k+3$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\text{pgcd}(a;b) = 1 \Leftrightarrow n = 4k$ ou $n = 4k+2 \Leftrightarrow n$ pair

$n \equiv \dots (4)$	0	1	2	3
$n-1 \equiv \dots (4)$	3	0	1	2

3) $n \neq 1$ $\quad \dfrac{b}{a} = \dfrac{n^2-3n+6}{n-1}$ entier

Il faut donc que $n-1 \mid 4$ avec $-4 \leq n-1 \leq 4$

soit $-3 \leq n \leq 5$ et $n \neq 1$.

$\mathcal{D}_4 = \{-4;-2;-1;1;2;4\}$

$a = n-1 = -4 \Rightarrow n = -3$ et $b = 24$ ok

$a = n-1 = -2 \Rightarrow n = -1$ et $b = 10$ ok

$a = n-1 = -1 \Rightarrow n = 0$ et $b = 6$ ok

$a = n-1 = 1 \Rightarrow n = 2$ et $b = 4$ ok

$a = n-1 = 2 \Rightarrow n = 3$ et $b = 6$ ok

$a = n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$ et $b = 16$ ok

$\boxed{n \in \{-3;-1;0;2;3;5\}}$