$T^{ale}S$ *spé* *12 janvier 2018*

Devoir de Mathématiques N^o 5 (30 min)

Exercice 1 (2 pts) :
Déterminer le reste de la division euclidienne de 2 016 × 2 017 × 2 018 par 11.

Exercice 2 (3 pts) :

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de de 3^n par 11 ?
2. En déduire les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.

Exercice 3 (5 pts) :

1. Compléter cette table des restes dans la congruence modulo 4.

$x \equiv ...[4]$	....	....	....	....
$x^2 \equiv ...[4]$				

2. Prouver que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$, d'inconnues x et y, entiers relatifs, n'admet pas de solutions.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $(x+3)^2 \equiv 1$ [4].

Exercice 4 (Bonus) :
Montrer que $xy(x^2 - y^2)$ est un multiple de 3 quels que soient les entiers x et y.

$xy(x^2-y^2)$ multiple de 3
$\iff xy(x^2-y^2) \equiv 0\ (3)$
$\iff x \equiv 0\ (3)$ ou $y \equiv 0\ (3)$ ou $x^2 - y^2 \equiv 0\ (3)$

$x \equiv ...(3)$	0	1	2
$y \equiv ...(3)$	0	1	2

- si $x \equiv 0\ (3)$ ou $y \equiv 0\ (3)$ alors $xy(x^2-y^2)$ multiple de 3
- si $x \equiv 1\ (3)$ et $y \equiv 1\ (3)$ ou si $x \equiv 2\ (3)$ et $y \equiv 2\ (3)$ alors $x^2 - y^2 \equiv 0\ (3)$ et $xy(x^2-y^2)$ multiple de 3
- si $x \equiv 1\ (3)$ et $y \equiv 2\ (3)$ ou si $x \equiv 2\ (3)$ et $y \equiv 1\ (3)$ alors $x^2 - y^2 \equiv 0\ (3)$ et $xy(x^2-y^2)$ multiple de 3.

C'est Vérifié dans Tous les cas

Correction du devoir n° 5 — TS spé

Ex 1 : $\begin{cases} 2016 = 11 \times 183 + 3 \\ 2017 = 11 \times 183 + 4 \\ 2018 = 11 \times 183 + 5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2016 \equiv 3 (11) \\ 2017 \equiv 4 (11) \\ 2018 \equiv 5 (11) \end{cases}$ $3 \times 4 \times 5 = 60$

par produit $2016 \times 2017 \times 2018 \equiv 60 (11) \equiv 5 (11)$
$60 = 5 \times 11 + 5$

$0 \leq 5 < 11$ Donc le reste est 5.

Ex 2

1) $\begin{cases} 3^0 \equiv 1 (11) \\ 3^1 \equiv 3 (11) \\ 3^2 \equiv 9 (11) \\ 3^3 \equiv 5 (11) \\ 3^4 \equiv 4 (11) \\ \boxed{3^5 \equiv 1 (11)} \end{cases}$

donc si $n = 5k$, $3^n = 3^{5k} = (3^5)^k$ $k \in \mathbb{N}$
alors $\boxed{3^n \equiv 1 (11)}$ par puissance
le reste est 1

de même $\begin{cases} \text{si } n = 5k+1, \ 3^n \equiv 3 (11) \text{ reste } 3 \\ \text{si } n = 5k+2, \ 3^n \equiv 9 (11) \text{ reste } 9 \\ \text{si } n = 5k+3, \ 3^n \equiv 5 (11) \text{ reste } 5 \\ \text{si } n = 5k+4, \ 3^n \equiv 4 (11) \text{ reste } 4 \end{cases}$

2) $3^n + 7$ est divisible par 11 $\iff 3^n + 7 \equiv 0 (11)$
$\iff 3^n \equiv -7 (11) \iff 3^n \equiv 4 (11) \iff n = 5k+4$

$\boxed{S = \{5k+4 \ / \ k \in \mathbb{N}\}}$

Ex 3 : 1)

$x \equiv \ldots (4)$	0	1	2	3
$x^2 \equiv \ldots (4)$	0	1	0	1

Table des Restes

2) donc

$7x^2 \equiv \ldots (4)$	0	3	0	3

Si $7x^2 - 4y^2 = 1$ alors $7x^2 - 4y^2 \equiv 1 (4)$
or $-4y^2 \equiv 0 (4)$ donc $7x^2 \equiv 1 (4)$ donc $S = \emptyset$
impossible d'après le tableau

3) $(x+3)^2 \equiv 1 (4) \iff x+3 \equiv 1 (4)$ ou $x+3 \equiv 3 (4)$ tableau
$\iff x \equiv -2 (4)$ ou $x \equiv 0 (4)$
$\iff x = 4k-2$ ou $x = 4k$ $(k \in \mathbb{Z})$

Soit x pair