Correction du devoir n°4 - TS spé

Ex1 : $(x;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solutions de $x^2 - 2xy - 7 = 0$

$x^2 - 2xy - 7 = 0 \iff x(x-2y) = 7$

or $7 = 7\times 1 = 1 \times 7 = -7 \times (-1) = (-1)\times(-7)$

$$\begin{cases} \text{si } x = 7,\ 7 - 2y = 1 \iff y = 3 \\ \text{si } x = 1,\ 1 - 2y = 7 \iff y = -3 \\ \text{si } x = -7,\ -7 - 2y = -1 \iff y = -3 \\ \text{si } x = -1,\ -1 - 2y = -7 \iff y = 3 \end{cases}$$

Les couples solutions sont $(7;3)$, $(1;-3)$, $(-7;-3)$ et $(-1;3)$

ex : $(7;3)$ $7^2 - 2\times 7 \times 3 - 7 = 49 - 42 - 7 = 0$

Ex2 : $A_n = 4^{2n+3} + 1$ $(n \in \mathbb{N})$

on veut montrer que A_n est divisible par 5, $\forall n \in \mathbb{N}$

initialisation : pour $n = 0$

$A_0 = 4^3 + 1 = 65 = 5 \times 13$ vrai pour $n = 0$

hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k soit divisible par 5, c'est à dire il existe $p \in \mathbb{N}$ ~~tel que~~ $4^{2k+3} + 1 = 5p$

$A_{k+1} = 4^{2(k+1)+3} + 1 = 4^{2k+2+3} + 1 = 4^{2k+3} \times 4^2 + 1$

$= (5p - 1)\times 16 + 1 = 16 \times 5p - 15$

$= 5(16p - 3)$ multiple de 5

vrai au rang $k+1$

Conclusion : propriété vraie pour $n = 0$, héréditaire

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n est divisible par 5

Ex3 : 1) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

15 nombres premiers inférieurs à 50

2) 1517 premier ? $\sqrt{1517} \simeq 39$ (par excès)

On teste la divisibilité de 1517 par tous les nombres premiers inférieurs à 39

$1517 = 41 \times 37$ donc 1517 n'est pas premier

3) $a^2 = b^2 + 1517 \iff a^2 - b^2 = 1517 \iff (a+b)(a-b) = 1517$

$a, b \in \mathbb{N}$ $\quad a+b \geqslant a-b$

or $1517 = 41 \times 37 = 1517 \times 1$

$\begin{cases} a+b = 41 \\ a-b = 37 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = 78 \\ b = 41 - a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 39 \\ b = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b = 1157 \\ a-b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = 1158 \\ b = 1157 - a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 579 \\ b = 578 \end{cases}$

deux couples solution $\boxed{(39\,;2)}$ et $\boxed{(579\,;578)}$

Ex4 : $S(n)$ somme des diviseurs positifs de n $(n \in \mathbb{N}^*)$

1) a) $\mathcal{D}_6 = \{1\,;2\,;3\,;6\}$ donc $S(6) = 1+2+3+6 = 12$

b) 7 premier donc $\mathcal{D}_7 = \{1\,;7\}$ et $S(7) = 8$

$45 = 3^2 \times 5$

$(2+1)\times(1+1) = 6$

45 possède 6 diviseurs

$\mathcal{D}_{45} = \{1\,;3\,;5\,;9\,;15\,;45\}$

$S(45) = 1+3+5+9+15+45 = 78$

2) algorithme

3) a) Tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, admet au moins deux diviseurs 1 et n donc $\boxed{S(n) \geqslant 1+n}$

b) $S(n) = 1 + n \iff$ n est premier

ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même

4) $n = p \times q$ (p, q premiers distincts)

$S(p) = 1 + p$ $\quad \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{p\times q} = \{1 ; p ; q ; pq\}$

$S(q) = 1 + q$ $\quad S(n) = S(p \times q) = 1 + p + q + pq$

$= (1+p)(1+q)$

5) $n = p^k$ (p premier, $k \in \mathbb{N}^*$)

a) les diviseurs sont les nombres p^α avec $0 \leq \alpha \leq k$ et $\alpha \in \mathbb{N}$

b) $S(n) = 1 + p + p^2 + \dots + p^k = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$

somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison p de premier terme 1

6) $n, m \in \mathbb{N}^*$ $\quad n \neq m$

- $S(p \times q) = S(p) \times S(q)$ $\quad p, q$ premiers distincts
- prenons $n = 6$ et $m = 45$ alors $n \times m = 270$

$270 = 2 \times 3^3 \times 5$ $\quad (1+1)\times(3+1)\times(1+1) = 12$ 12 diviseurs

$\mathcal{D}_{270} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 27 ; 30 ; 45 ; 54 ; 90 ; 135 ; 270\}$

$S(270) = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + \dots + 135 + 270 = 720$

or $S(6) \times S(45) = 12 \times 78 = 936$

$S(6 \times 45) \neq S(6) \times S(45)$ la proposition est fausse

---

Ex 5 : p et $(8p-1)$ premiers ; soit $k \in \mathbb{N}$

- $p = 3k$ non premier
- $p = 3k+1$ alors $8p - 1 = 24k + 8 - 1 = 3(8k+2) + 1$ premier

et $8p + 1 = 24k + 8 + 1 = 3(8k+3)$ composé

- $p = 3k+2$ alors $8p - 1 = 24k + 16 - 1 = 3(8k+5)$

non premier

si p et $8p-1$ sont premiers

alors $8p+1$ est composé