

Devoir n°9 - Calcul intégral - TSpé

18 mars 2026 - 2h

Exercice 1 (4,5 pts) : Déterminer la valeur exacte de chaque intégrale.

$$A = \int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^3} dx$$

$$B = \int_{-1}^2 3x^2(5x^3 - 1)^2 dx$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \quad (2 \text{ intégrations par parties successives})$$

Exercice 2 (6,5 pts) : Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.

On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.
2. On admet que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, la recette mensuelle est modélisée par :

$$r(x) = 6 + x + 2 \ln(x).$$

Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

3. a) Justifier que l'équation $r(x) = 10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 5]$, puis donner une valeur approchée de α au millième.
b) Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.
4. a) Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par $g(x) = 2 \ln(x)$.
Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par

$$G(x) = 2x[\ln(x) - 1]$$

est une primitive de la fonction g .

- b) En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
- c) Donner une valeur approchée à la dizaine d'euros de la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées.

Exercice 3 (9 pts) : On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et, pour } n \geq 1, f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. a) On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; +\infty[$. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x}.$$

- b) Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0

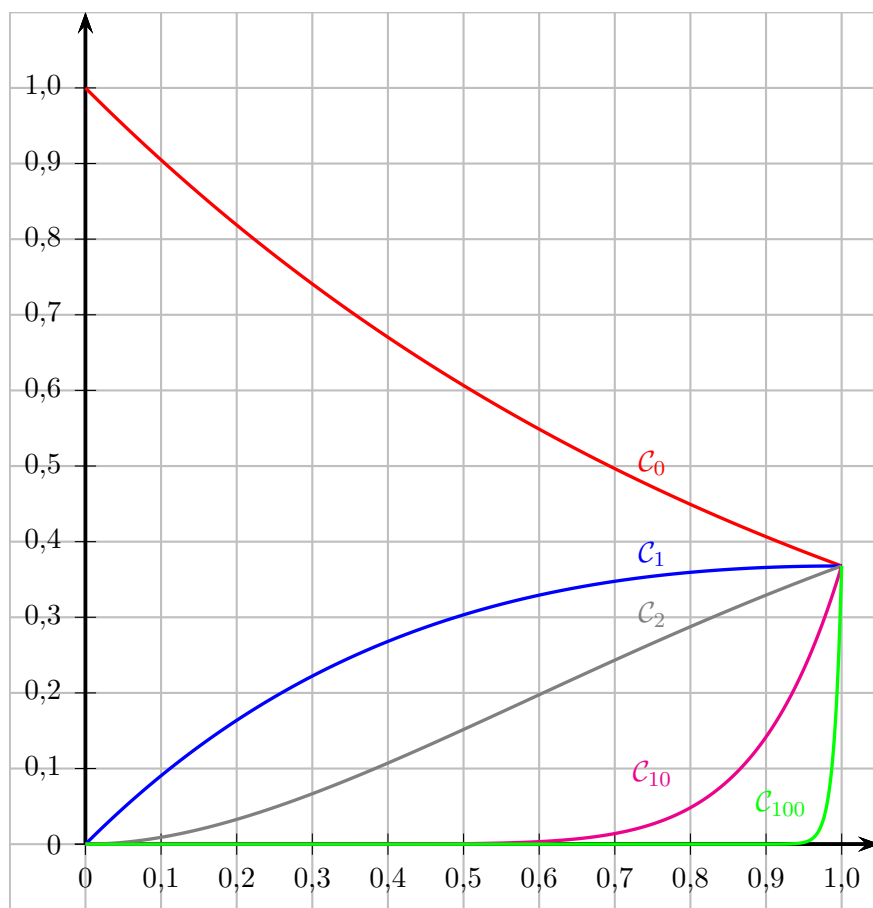
2. Justifier par le calcul que le point $A(1 ; e^{-1})$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0 ; 1]$, et la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Sur le graphique, sont représentées les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.
 - a) Donner une interprétation graphique de I_n .
 - b) Par lecture de ce graphique, quelles conjectures peut-on émettre sur les variations et la limite de la suite (I_n) ?



2. Calculer I_0 .
3. a) Soit n un entier naturel. Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

- b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ .
5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}.$$

6. a) Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
- b) Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.