

Ex 1:

$$A = \int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^3} dx = \int_{-2}^{-1} 4x^{-3} dx = \left[4 \times \frac{x^{-2}}{-2} \right]_{-2}^{-1}$$

$$\text{done } \textcircled{A} = \left[-2x^{-2} \right]_{-2}^{-1} = -2 + 2 \times 2^{-2} = -2 + \frac{2}{4} = \textcircled{\frac{-3}{2}}$$

$$B = \int_{-1}^2 3x^2 (5x^3 - 1)^2 dx = \left[\frac{1}{5} \times \frac{(5x^3 - 1)^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$u(x) = 5x^3 - 1$
 $u'(x) = 15x^2$

$$\text{done } \textcircled{B} = \frac{39^3}{15} - \frac{(-6)^3}{15} = \frac{39^3 + 6^3}{15} = \textcircled{3969}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{C} &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} dx = \left[\underbrace{x^2}_{u} \times \underbrace{\sin x}_{v} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{2x}_{u'} \times \underbrace{\sin x}_{v} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{(-\sin x)}_{v'} dx \quad \text{par linéarité} \\ &= \frac{\pi^2}{4} + 2 \times \underbrace{\left[\underbrace{x \cos x}_{=0} \right]_0^{\pi/2}}_{=0} - 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos x}_{u'} \underbrace{dx}_{v=1} \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \textcircled{\frac{\pi^2}{4} - 2} \end{aligned}$$

(14,5)

2

(15)

E x 2: 1) $r(1) = 7$

pour 1000 voitures, la
recette est de 70 000 €

95

2) $r(x) = 6 + x + 2\ln(x)$ sur $[1; 5]$

recette en dix milliers d'€ pour x milliers
de voitures vendues

$r'(x) = 1 + \frac{2}{x}$ $r(x) > 0$ donc r strictement
croissante sur $[1; 5]$ 1

3)

x	1	5
$r(x)$	7	$11 + 2\ln(5)$

①, sur $[1; 5]$, r continue
(car dérivable)

• r strictement croissante

• $r(1) = 7$ et $r(5) = 11 + 2\ln 5$
 $\approx 14,2$

$10 \in [7; r(5)]$

D'après la corollaire du théorème des valeurs
intermédiaires, l'équation $r(x) = 10$ admet
une seule solution α sur $[1; 5]$. 125

D'après la calculatrice

$r(2,318) < 10$ donc $2,318 < \alpha < 2,319$

$r(2,319) > 10$ et $\alpha \approx 2,318$ par défaut 978

⑥ 100 000 € = 10 dix milliers d'€

il s'agit de résoudre $r(x) > 10$

D'après la question précédente, l'entreprise
réalisera un bénéfice supérieur à 100 000 €
si elle vend au moins 2319 voitures. 978

17

4) a) $g(x) = 2\ln(x)$ sur $[1; 5]$

$G(x) = 2x (\ln x - 1)$

$G'(x) = 2(\ln x - 1) + 2x \times \frac{1}{x} = 2\ln x - 2 + 2 = 2\ln x$

$G'(x) = g(x)$ sur $[1; 5]$

donc G est une primitive de g sur $[1; 5]$

b) $r(x) = 6 + x + 2\ln(x) = 6 + x + g(x)$

Donc $R(x) = 6x + \frac{1}{2}x^2 + G(x)$ est une primitive de r sur $[1; 5]$

c) La valeur moyenne est donnée par

$M = \frac{1}{4-2} \int_2^4 r(x) dx = \frac{1}{2} [R(x)]_2^4$

$R(4) = 24 + 8 + 8(\ln 4 - 1) = 32 + 8\ln 4 - 8 = 24 + 8\ln 4$

$R(2) = 12 + 2 + 4(\ln 2 - 1) = 14 + 4\ln 2 - 4 = 10 + 4\ln 2$

$M = \frac{1}{2} (24 + 8\ln 4 - 10 - 4\ln 2) = \frac{1}{2} (14 + 16\ln 2 - 4\ln 2)$

Donc $M = 7 + 6\ln 2 \approx 11,159$

La valeur moyenne de la recette totale par une vente entre 2000 et 4000 voitures est de 411 590 € environ

Ex3 : (Polynésie 1 juin 2025)

14,5

$f_0(x) = e^{-x}$ et $f_m(x) = x^m e^{-x}$ (pour $m \in \mathbb{N}^*$)
sur $[0; +\infty[$

Partie A: pour $m \geq 1$

13

1) a) $f'_m(x) = m x^{m-1} \times e^{-x} + x^m \times (-e^{-x}) = e^{-x} (m x^{m-1} - x^m)$
 $= x^{m-1} e^{-x} (m - x)$

9,5

b) sur $[0; +\infty[$

9,5

$x^{m-1} \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f'_m(x)$ est du signe de $(m - x)$; $f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq x$

9,5

$f_m(0) = 0 \times e^0 = 0$; $f_m(x) = \frac{x^m}{e^x}$ ($m \geq 1$).

9,5

Par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$ Par quotient
 $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = 0$

$f_m(m) = m^m e^{-m} = \frac{m^m}{e^m} = \left(\frac{m}{e}\right)^m$ 2) $f_m(1) = 1^m e^{-1} = e^{-1}$
Donc $A(1; e^{-1}) \in \mathcal{C}_m$

Partie B: pour $m \geq 0$

17,5

$I_m = \int_0^1 f_m(x) dx = \int_0^1 x^m e^{-x} dx$ sur $[0; 1]$

1) a) sur $[0; 1]$, f_m continue (car dérivable)
 $f_m(x) \geq 0$ ($x^m \geq 0$; $e^{-x} > 0$)
 $0 < 1$

Donc I_m est l'aire du domaine de limite par les droites d'équations $x=0$; $x=1$; $y=0$ et $\mathcal{C}_m$ ($m \in \mathbb{N}$) en u-a. 4,5

b) $\mathcal{C}_0$ est au-dessus de $\mathcal{C}_1$, au-dessus de $\mathcal{C}_2$, au-dessus de $\mathcal{C}_3$, au-dessus de $\mathcal{C}_4$, donc (I_m) est décroissante et semble tendre vers 0.

9,5

$$2) I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1$$

Donc $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$ qts

3) a) $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq x \leq 1$
 $\Rightarrow 0 \leq x \times x^n \leq x^n$ ($x^n \geq 0$) qts
 $\Rightarrow$ $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$

b) alors $0 \leq x^{n+1} e^{-x} \leq x^n e^{-x}$ ($e^{-x} > 0$)

soit $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

or f_n continues sur $[0; 1]$ et $0 \leq 1$

Par le théorème de l'intégrale

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$$

$\Rightarrow$ $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) on a donc (I_n) décroissante et minorée par 0
 Par le théorème de convergence, (I_n) converge vers l
 De plus, par passage à la limite dans l'inégalité
 on a $l \geq 0$ qts

5) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = \left[x^{n+1} \times (-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n \times (-e^{-x}) dx$
 $= -e^{-1} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ par linéarité
 $= -e^{-1} + (n+1) I_n =$ $(n+1) I_n - \frac{1}{e}$ ($n \in \mathbb{N}$) 125

6) a) Soit $l > 0$, on a $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = l$

Par produit et somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) I_n - \frac{1}{e} = +\infty$

qts Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = +\infty$ Contradiction $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = l$

b) D'après la question 4) $l \geq 0$
 or d'après 6) a) $l > 0$ impossible, alors $l \leq 0$
 donc $l = 0$ qts