

$$\begin{array}{l|l}
 A(4; -4; 4) & 1) \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 B(5; -3; 2) & \\
 C(6; -2; 3) & \\
 D(5; 1; 1) & \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1+1-2=0 \\
 H(7; -1; 1) & \vec{AB} \perp \vec{BC} \text{ donc } (AB) \perp (BC) \\
 & \text{Alors } \underline{\text{ABC est un triangle}} \\
 & \underline{\text{rectangle en B}}
 \end{array}$$

2) A, B et C ne sont donc pas alignés;
il définissent un plan (ABC).

Soit l'équation $x - y - 8 = 0$

$$\begin{cases}
 4 - (-4) - 8 = 0 \\
 5 - (-3) - 8 = 0 \\
 6 - (-2) - 8 = 0
 \end{cases}$$

Les coordonnées de A, B et C
vérifient l'équation
donc le plan (ABC) a bien
pour équation : $x - y - 8 = 0$

3) soit $(d) \perp (ABC)$ avec $D \in (d)$

@ $\vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur normal
de (ABC) est
un vecteur directeur
de (d)

alors; $(d): \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$

6) H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)

$$H(x; y; z) \in (d) \cap (ABC)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5+t) - (1-t) - 8 = 0 \\ x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 7 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

donc $H(7; -1; 1)$

c) $\vec{DH} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $DH^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \underline{DH = 2\sqrt{2}}$

(2)

8.5

4) @ La pyramide ABED a pour base le triangle ABE rectangle en B

$$\begin{cases} AB^2 = 1 + 1 + 4 = 6 \\ BE^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \end{cases} \text{ donc } \beta = \frac{1}{2} AB \times BE = \frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt{3}$$

$$\underline{\beta = \frac{1}{2} \sqrt{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ u.a.}}$$

1.5 [DH] est la hauteur correspondante au plan (ABE)

donc $V = \frac{1}{3} \times \beta \times h = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \underline{2 \text{ u.N}}$

b) L'aire du triangle BED est $\beta' = \frac{\sqrt{42}}{2} \text{ u.a.}$

Soit AK la distance du point A au plan (BED); [AK] est la hauteur issue de A

$$\text{on a } V = \frac{1}{3} \times \beta' \times AK$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{42}}{2} \times AK$$

$$\Rightarrow \frac{12}{\sqrt{42}} = AK$$

$$\Rightarrow AK = \frac{12\sqrt{42}}{42}$$

$$\Rightarrow \underline{AK = \frac{2\sqrt{42}}{7}}$$

Ex 2: Ann Nord mai 2005

Aff 1: (d):
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d)

et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de l'axe des ordonnées (Oy)

• $\vec{u}$ et $\vec{j}$ non colinéaires donc (d) et (Oy) non parallèles

$$(Oy): \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$M(x; y; z) \in (d) \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 - 2t \\ k = -1 \\ 0 = 2 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3/2 \\ k = -1 \\ 0 = 2 - 6 \times 3/2 \text{ faux} \end{cases}$$

• (d) et (Oy) ne sont pas sécantes

donc (d) et (Oy) ne sont pas coplanaires VRAI

Aff 2: $P' \perp (d)$ donc $\vec{u}$ vecteur normal à P'

alors $P': x + 3z + d = 0$

$$A(3; -3; -2) \in P' \Leftrightarrow 3 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$$

donc une équation cartésienne de P' est $x + 3z + 3 = 0$ VRAI

Aff 3: $A(3; -3; -2)$

$B(5; -4; -1)$

$C(2; -1; -1)$

$$C(2; y; z) \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= -2 - 2 + 1 = -3 \quad \text{et} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= \sqrt{6} \sqrt{6} \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 6 \cos(\widehat{BAC}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} AB^2 = 4 + 1 + 1 = 6 \\ AC^2 = 1 + 4 + 1 = 6 \end{cases}$$

$$\text{on a donc } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \quad \text{alors } \widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{FAUX}$$

Aff 4: H projeté orthogonal de B sur $P: x + 3z - 7 = 0$

$(d') \perp P$ passant par B

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ normal à P

$$(d'): \begin{cases} x = 5 + k \\ y = -4 \\ z = -1 + 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$H \in (d') \cap P$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + k \\ y = -4 \\ z = -1 + 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = -4 \\ z = 1/2 \\ k = 1/2 \end{cases}$$

$$H(1/2; -4; 1/2)$$

$$\vec{BH} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad BH^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow BH = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{VRAI}$$