

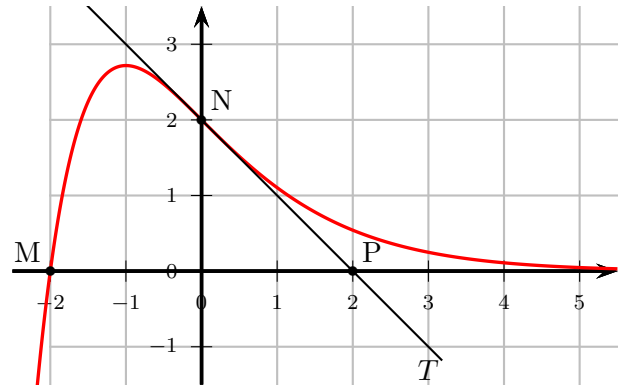
Devoir n°7 - Fonctions et suites - TSpé

14 janvier 2026 - 2h

Exercice 1 (8 pts) : Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point $N(0 ; 2)$;
- le point $M(-2 ; 0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et $P(2 ; 0)$ appartenant à la tangente T .



Partie A : Etude graphique

On justifiera toutes les réponses en utilisant le graphique.

- Donner $f(0)$ et déterminer $f'(0)$.
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?
- Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3

Partie B : Recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)e^{\lambda x},$$

où a , b et λ sont des constantes réelles.

- Justifier que $b = 2$.
- Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a .
- Déterminer une expression algébrique de f . Justifier.

Partie C : Etude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- On admet que $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f .
- Étudier la convexité de f .
 - Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 (8 pts) : On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 - X - 2 = 0$.
 b) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$.
 c) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.
 d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 (4 pts) : Les trois questions de cet exercice sont indépendantes

1. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}.$$

Déterminer la limite de la suite (S_n) .

2. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 + x - \frac{1}{x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_2(x) = e^{1-3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+3} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

3. Résoudre l'équation $\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(5)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Bonus ou DM :) : Soit k est un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$-\infty$

1. Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.
2. Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k , puis montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.
4. Donner, selon les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.