

Exercice 4**5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
 - a. Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Interpréter graphiquement ce résultat.
3.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I = \int_1^2 f(x) dx$.
 - a. Calculer I .
 - b. Interpréter graphiquement le résultat.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

- a. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
- b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad \text{sur }]0; +\infty[$$

1) $g(x) = e^{\sqrt{x}} \quad \text{sur }]0; +\infty[$

@ $g = e^u \quad g' = e^u \times u'$

$$g'(x) = e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x) \quad \text{q.s.}$$

⑥ $f = \frac{g}{v} \quad f' = \frac{g'v - gv'}{v^2}$

$v(x) = 2\sqrt{x} \quad v'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = \frac{f(x) \times 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}$

donc $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}} \times \sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}} \quad \text{q.s.}$

2) @ $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0^+$

$x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$

Par composition et quotient

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

⑥ La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

3) @ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$x = \sqrt{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par comparaison

Par composition et produit,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

⑥ $e^{\sqrt{x}} > 0$; $4x\sqrt{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$

$f'(x)$ est du signe de $(\sqrt{x} - 1)$

$\sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1$

$\Leftrightarrow x > 1$

$x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (ou x^2)

⑥ sur $[1; +\infty[$, f est continue (car dérivable)

• f strictement croissante

• $f(1) = \frac{e}{2} (< 2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α sur $[1; +\infty[$

d'après la calculatrice

$$\begin{cases} f(4,63) < 2 \\ f(4,64) > 2 \end{cases} \quad \text{donc } \underline{4,63 < \alpha < 4,64} \text{ et } \underline{\alpha \approx 4,6} \quad 0,75$$

4)

5) $f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

@ $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour $x \in]0; +\infty[$

$$x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 = x$$

qs l'inéquation devient $x^2 - 3x + 3 > 0 \quad x \in]0; +\infty[$

$$\Delta = 9 - 12 = -3$$

$\Delta < 0$ donc l'expression est du signe de $a = 1$

qts alors $x^2 - 3x + 3 > 0$ pour $x \in]0; +\infty[$

qts Donc $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ sur $]0; +\infty[$

⑥ $8x^2\sqrt{x} > 0$ et $e^{\sqrt{x}} > 0$

on a donc $f''(x) > 0$ qts

alors f est toujours convexe sur $]0; +\infty[$