

Partie I: $g(x) = \ln x + 2x - 2$ sur $]0; +\infty[$

(4)

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty$ Par Somme $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \end{array} \right.$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 2) = -2$

2) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme

$g'(x) = \frac{1}{x} + 2$ sur $]0; +\infty[$, $g'(x) > 0$
donc g strictement croissante

3) sur $]0; +\infty[$, g continue (car dérivable)

g strictement croissante

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0; +\infty[$.

4) $g(1) = \ln 1 + 2 - 2 = 0$ donc $\alpha = 1$

D'après ce qui précède

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$ $	- 0 +	

Partie II: $f(x) = (2 - \frac{1}{x})(\ln x - 1)$ sur $]0; +\infty[$ (4)

1) @ $f = uv$ $f' = u'v + uv'$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) + (2 - \frac{1}{x}) \times \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

$= \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{\ln x - 2 + 2x}{x^2}$

$= \frac{g(x)}{x^2}$

(b) $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$ $	- 0 +	
$f(x)$	$ $		

$f(1) = (2 - 1) \times (\ln 1 - 1) = 1 \times (-1) = -1$

$$2) f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{1}{x} \text{ ou } \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 \text{ ou } x = e$$

$$\Leftrightarrow x = 1/2 \text{ ou } x = e$$

$$S = \{1/2; e\}$$

$$\begin{cases} 2 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow 2 > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x & x \mapsto \frac{1}{x} \text{ st } \searrow \text{ sur }]0; +\infty[\\ \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e & x \mapsto \ln x \text{ st } \nearrow \text{ sur }]0; +\infty[\end{cases}$$

x	0	$1/2$	e	$+\infty$
$2 - 1/x$		-	0	+
$\ln x - 1$		-	0	+
$f(x)$		+	0	-

428

Partie III: $F' = f$ sur $]0; +\infty[$

(12)

1) D'après la question précédente, F est strictement croissante sur $]0; 1/2]$ et sur $[e; +\infty[$.
 F décroissante sur $[1/2; e]$

2) on peut résoudre $F'(x) = 0$ (coefficient directeur de la tangente nul)
 soit $f(x) = 0$

d'après la question précédente, $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $1/2$ et e .

Bonus: en $+\infty$

Par somme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{x}) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$$

Par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

en 0^+

Par somme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \frac{1}{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1) = -\infty$$

Par produit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$