

Devoir n°5 - Convexité - TVI - TSpé maths

3 décembre 2025 - 45 min

Exercice 1 (10,5 pts) : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $] -\infty ; 1[$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 1 ; en déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$; en déduire une interprétation graphique.
3. a) Calculer la fonction dérivée f' sur $] -\infty ; 1[$.
b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f .
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}.$$

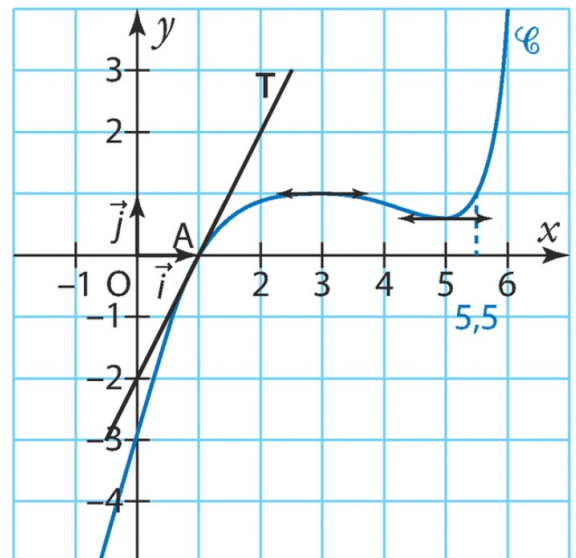
- a) Étudier la convexité de la fonction f sur $] -\infty ; 1[$.
- b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- c) En déduire que, pour tout réel $x \in] -\infty ; 1[$, on a :

$$e^x \geq (-2x - 1)(x - 1).$$

5. a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
6. **Bonus** : Calculer f'' sur $] -\infty ; 1[$.

Exercice 2 (4,5 pts) : On considère une fonction f définie sur $] -\infty ; 6]$ dont on donne le graphe ci-dessous. Soit g la fonction définie sur $] -\infty ; 6]$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
2. Donner les variations de la fonction f et en déduire les variations de la fonction g .
3. Calculer $g'(1)$ et $g'(3)$ (bien justifier).
4. Résoudre $g(x) = e$.



Exercice 3 (A faire à la maison) : On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0 ; +\infty[$, on a $f(x) = \frac{x}{e^x}$, démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0 ; +\infty[$.

4. Déterminer, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = \frac{367}{1\,000}$.

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$:

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

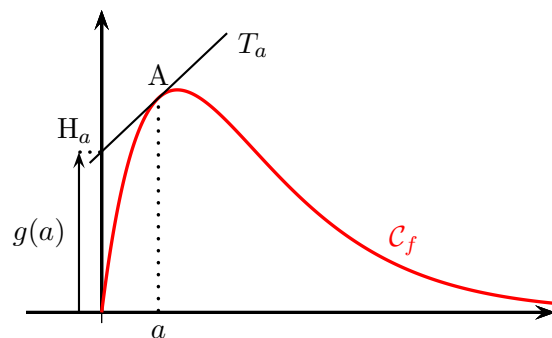
6. Soit a un réel appartenant à $[0 ; +\infty[$ et soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A .

On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a .

La situation est représentée sur la figure ci-contre.



- a) Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = [(1 - a)^{-a}] x + a^{2-a}.$$

- b) En déduire l'expression de $g(a)$.

- c) Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.