

Ex 1 : $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

(14)

1) f est continue sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$ comme fonctions de référence continues.

• en -1 ? $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = -1 + 2 = 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-1+2} = 1 = f(-1)$

donc on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ alors f est continue en -1

• En conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$

15

2) f est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$ comme fonctions de référence dérivables.

• en -1 ?

pour $x < -1$ $T(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{-x^2 - 2x - 1}{x + 1} = \frac{-(x+1)^2}{x+1} = -(x+1)$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} T(x) = 0$

pour $x > -1$ $T(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{\frac{1}{x+2} - 1}{x+1} = \frac{\frac{-x-1}{x+2}}{x+1} = \frac{-x-1}{(x+2)(x+1)} = \frac{-(x+1)}{(x+2)(x+1)} = -\frac{1}{x+2}$

donc $T(x) = -\frac{1}{x+2}$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} T(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} T(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} T(x)$

donc f n'est pas dérivable en -1

alors f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

Remarque : f admet deux demi-tangentes en $A(-1; 1)$
point « anguleux »

25

Ex 2 : Partie A : $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[0; +\infty[$ (18)

1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $f'(x) > 0$ 1
donc f strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2) $f(x) - x = (\sqrt{x+1} - x) = (\sqrt{x+1} - x) \times \frac{\sqrt{x+1} + x}{\sqrt{x+1} + x}$
 $= \frac{(x+1) - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$ 9.5

3) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0$
 $\Delta = 5$ $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \notin [0; +\infty[$
Donc $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$ 1

Partie B : $u_0 = 5$
 $(u_{n+1} = f(u_n))$ pour $n \in \mathbb{N}$

1) on veut montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

initialisation : pour $n=0$ $u_0 = 5$ $u_1 = f(5) = \sqrt{6} \approx 2$,
on a bien $1 \leq u_1 \leq u_0$ vrai pour $n=0$

Récurrence : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$
 f strictement croissante sur $[0; +\infty[$

donc $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

or $\sqrt{2} > 1$ donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ vrai au rang $n+1$

conclusion : par principe de récurrence, on a
montré que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ 2

2) on a donc (u_n) décroissante minorée par 1
D'après le théorème de convergence des suites
monotones, (u_n) converge vers l' . 9.5

3) $u_{n+1} = f(u_n)$ et f continue sur $[0; +\infty[$ (car dérivable)
D'après le théorème du "point fixe"
 l' vérifie $l' = f(l')$
d'après la question A 3) $l' = l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 1

Ex 2 4) pour seuil(4), le programme affiche 3
le plus petit rang tel que $|u_m - l| < 10^{-4}$
 $|u_8 - l| > 10^{-4}$ et $|u_9 - l| < 10^{-4}$ 95

Ex 3: $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$ 1195

Partie A: $g(x) = 1 - x + e^x$ sur $\mathbb{R}$

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$ Par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ 95

• $g(x) = 1 + x(-1 + \frac{e^x}{x})$ Par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Par somme et produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 95

2) $g'(x) = -1 + e^x$ 95
 $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$
 $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ 95

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

3) 2 est le minimum pour $g(x)$ atteint en $x=0$
 donc $g(x) \geq 2 > 0$ 95

Partie B:

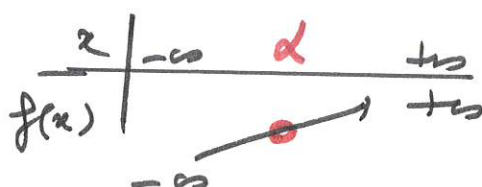
1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ Par quotient et somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 95

• $\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (c.c.)
 Par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 95

2) $f'(x) = 1 + \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{(1-x)e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x}{e^x}$

95 donc $f'(x) = \frac{e^x + 1 - x}{e^x} = e^{-x} g(x)$

3) $e^x > 0$ et $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$
 donc $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ 95



- 4) • f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable)
 • f strictement croissante
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$

1,5

D'après la calculatrice

$$\begin{cases} f(-0,41) < 0 \\ f(-0,40) > 0 \end{cases} \text{ donc } \underline{-0,41 < \alpha < -0,40}$$

0,75

Partie C:

1) T: $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$ $\begin{cases} f'(0) = 2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$
 donc $y = 2x + 1$

0,75

2) $f(x) - (2x + 1) = (x + 1) + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) = \frac{x}{e^x} - x = \frac{x}{e^x} (1 - e^x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$1 - e^x$	+	0	-
$f(x) - (2x + 1)$	-	0	-

$f(x) \leq 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$
 donc $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessous de T
 $\mathcal{C}_f \cap T$ se coupe en $A(0; 1)$

1,5

Bonus: $E(x) = n$ c'est à dire $n \leq x < n+1$ $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

1) alors $n-1 \leq x-1 < n$
 or $E(x) = n$ donc $x-1 \leq E(x) \leq x$ sur $\mathbb{R}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Par comparaison} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = +\infty \end{array} \right.$

3) pour $x \neq 0$ $\frac{1}{x} - 1 \leq E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$
 donc $x > 0$ $1 - x \leq x E(\frac{1}{x}) \leq 1$
 et $x < 0$ $1 - x > x E(\frac{1}{x}) > 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x) = 1$

D'après le théorème des gendarmes
 $\lim_{x \rightarrow 0} x E(\frac{1}{x}) = 1$