

Devoir n°3 - Suites - Limites de fonctions - TSpé maths

20 octobre 2025 - 50 min

Exercice 1 (10 pts) : Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$$f_1(x) = \frac{-x^3 - 4x^2 - 1}{2x^3 + 8}; \quad \text{en } -\infty$$

$$f_3(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{3x+4}; \quad \text{en } +\infty$$

$$f_2(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 3x + 2}; \quad \text{en } -1$$

$$f_4(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}; \quad \text{en } 1$$

Exercice 2 (10 points) : Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = -1$, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$$

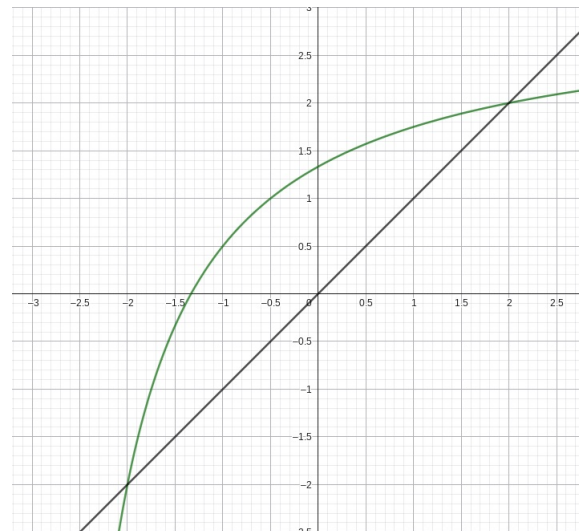
Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 4}{x + 3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On donne la courbe $\mathcal{C}_f$, représentative de la fonction f , et la droite D d'équation $y = x$.

Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 .

Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?



2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$
- Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - Bonus :** En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \left(\frac{5^n - 3}{5^n + 3} \right)$
 - Bonus :** Déterminer la limite de la suite (u_n) .