

Devoir n°3 - Suites - Limites de fonctions - TSpé maths

20 octobre 2025 - 50 min

Exercice 1 (10 pts) : Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$$f_1(x) = \frac{-x^3 - 4x^2 - 1}{2x^3 + 8}; \quad \text{en } -\infty$$

$$f_3(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{3x+4}; \quad \text{en } +\infty$$

$$f_2(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 3x + 2}; \quad \text{en } -1$$

$$f_4(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}; \quad \text{en } 1$$

Exercice 2 (10 points) : Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = -1$, et pour tout entier naturel n :

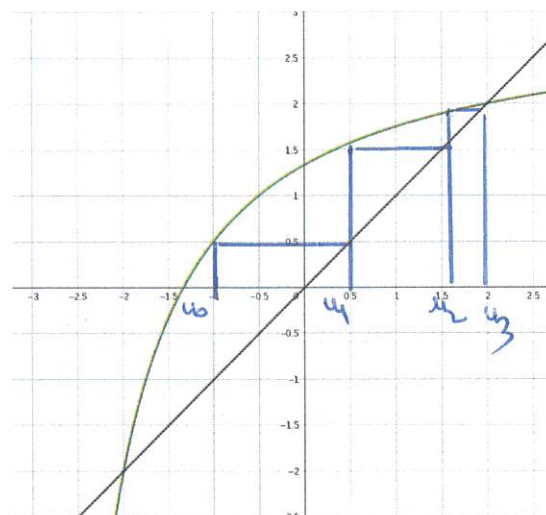
$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$$

Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x + 4}{x + 3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

- On donne la courbe $\mathcal{C}_f$, représentative de la fonction f , et la droite D d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 .

Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?



- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$
- En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$
 - Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - Bonus :** En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \left(\frac{5^n - 3}{5^n + 3} \right)$
 - Bonus :** Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Ex 1 : $f_1(x) = \frac{-x^3 - 4x^2 - 1}{2x^3 + 8}$ en $(-\infty)$

$f_1(x) = \frac{x^3(-1 - 4/x - 1/x^2)}{x^3(2 + 8/x^3)} = \frac{-1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{8}{x^3}}$ /2,5

Par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}) = -1$ Par Quotient
 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{8}{x^3}) = 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\frac{1}{2}$

La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $-\infty$

$f_2(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 3x + 2}$ en (-1) $D(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 4) = -5$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} D(x) = 0^+$
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} D(x) = 0^-$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$D(x)$	$+$	0	-0	$+$

$\begin{matrix} a < 0 \\ a > 0 \end{matrix}$ du signe de a d'extérieur des racines

/3

Par Quotient $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_2(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f_2(x) = +\infty$
 La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_2$

$f_3(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{3x+4}$ en $(+\infty)$

$f_3(x) = (\sqrt{3x} - \sqrt{3x+4}) \times \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}} = \frac{3x - (3x+4)}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}}$
 $= \frac{-4}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}}$

Par composé et somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x} + \sqrt{3x+4} = +\infty$

Par Quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = 0$ /2,5

La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_3$ en $+\infty$

$$f_4(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} \quad (x \neq 1)$$

12

$$N(x) = x^2 + x - 2$$

$$N(1) = 0$$

$$N(x) = (x-1)(x+2)$$

$$D(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$D(1) = 0$$

$$D(x) = (x-1)(x+3)$$

$$f_4(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3}$$

pour $x \neq 1$

Par quotient $\lim_{x \rightarrow 1} f_4(x) = \frac{3}{4}$

Ex 2: 5) (b) $N_n = N_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 5^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Bonus

$$N_n = \frac{u_{n+2}}{u_{n-2}} \Leftrightarrow N_n(u_{n-2}) = u_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow N_n u_n - 2u_n = u_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow N_n u_n - u_n = 2u_n + 2$$

$$\Leftrightarrow u_n(N_n - 1) = 2(N_n + 1)$$

pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow u_n = 2 \left(\frac{N_n + 1}{N_n - 1} \right)$$

Alors $u_n = 2 \times \left(\frac{-\frac{1}{3} \times 5^n + 1}{-\frac{1}{3} \times 5^n - 1} \right) = 2 \left(\frac{-5^n + 3}{-5^n - 3} \right) = 2 \left(\frac{5^n - 3}{5^n + 3} \right)$

$$\textcircled{c} \quad \frac{5^n - 3}{5^n + 3} = \frac{5^n(1 - 3/5^n)}{5^n(1 + 3/5^n)} = \frac{1 - 3/5^n}{1 + 3/5^n}$$

$5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$

Par quotient et somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 3/5^n) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 3/5^n) = 1$$

Par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n - 3}{5^n + 3} = 1$$

Par l'adit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Ex 2 : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} \end{cases} (n \in \mathbb{N})$ et $f(x) = \frac{3x+4}{x+3} \text{ sur }]-3; +\infty[$

1) il semble que (u_n) soit croissante et convergente vers 2

2) $f'(x) = \frac{3(x+3) - (3x+4) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$; $f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $] -3; +\infty[$

3) on veut montrer que $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ pour $n \in \mathbb{N}$

• initialisation : pour $n=0$

$u_0 = -1$ $u_1 = \frac{-3+4}{-1+3} = \frac{1}{2}$ on a $-2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$
vrai pour $n=0$

• Récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

f strictement croissante sur $] -3; +\infty[$

donc $f(-2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$

donc $-2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

vrai au rang $(n+1)$

$f(-2) = \frac{-2}{1} = -2$
 $f(2) = \frac{10}{5} = 2$

• conclusion : par principe de récurrence,
on a $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2 ; d'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

5) $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$ (pour $n \in \mathbb{N}$)

@ $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 2}$

on a $u_{n+1} + 2 = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} + 2 = \frac{5u_n + 10}{u_n + 3}$ et $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$

donc $v_{n+1} = \frac{5u_n + 10}{u_n + 3} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 2} = \frac{5(u_n + 2)}{u_n - 2} = 5v_n$

et $v_0 = \frac{u_0 + 2}{u_0 - 2} = -\frac{1}{3}$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $v_0 = -\frac{1}{3}$