

Devoir n°2 - Suites - TSpé maths

6 octobre 2025 - 50 min

Exercice 1 (6 pts) : Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = n^3 - 3n^2 + 5, (n \in \mathbb{N})$$

$$v_n = \frac{3n^2 + 4}{2 - 2n^2}, (n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$$

$$w_n = (5 + (-1)^n) \left(\frac{3}{4}\right)^n, (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 2 (14 points) : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. a) Montrer que $u_1 = 12$.
b) Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - n - 1$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , et vérifier que

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1$$

- c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.
a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 3 (Bonus) : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. A justifier.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\frac{11}{4}$

b. $\frac{13}{2}$

c. 3,5

b. 2,7

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

b. géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c. constante.

d. ni arithmétique, ni géométrique.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.

On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

1	def terme (n)
2	U=3
3	for i in range(n) :
4	
5	return U

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n , on peut compléter la ligne 4 par :

a. $U = U/2 + (i+1)/2+1$

b. $U = U/2 + n/2 + 1$

c. $U = U/2 + (i-1)/2+1$

d. $U = U/2 + i/2 + 1$

Ex 2:
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

0,25

14

1) a) $u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 3 = 12$

0,5

b) $u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 53$

0,5

2) a) on veut montrer que $u_n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

0,25

initialisation: pour $n=0$

$u_0 = 3$ et $0+1=1$ on a $u_0 \geq 0+1$ c'est vérifié

0,75

Réédite: soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \geq n+1$

0,75

on veut montrer que $u_{n+1} \geq n+2$

$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$

$u_n \geq n+1$

$\Leftrightarrow 5u_n \geq 5n+5$

$\Leftrightarrow 5u_n - 4n - 3 \geq n+2$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq n+2$ vrai au rang $(n+1)$

1,5

conclusion: par principe de récurrence

on a $u_n \geq n+1$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

0,5

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ Par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

1

3) $v_n = u_n - n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

0,25

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$

$v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$

0,25

$= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1$

$= 5u_n - 5n - 5$

$= 5(u_n - n - 1)$

$= 5v_n \quad (n \in \mathbb{N})$

(v_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $v_0 = 2$

0,5

b) donc $v_n = v_0 \times 5^n = 2 \times 5^n$

1

et $u_n = v_n + n + 1 = 2 \times 5^n + n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \quad u_{n+1} - u_n &= (2 \times 5^{n+1} + n + 2) - (2 \times 5^n + n + 1) \\ &= 2 \times 5^{n+1} - 2 \times 5^n + 1 \\ &= 2 \times 5^n \times (5 - 1) + 1 \\ &= \underline{8 \times 5^n + 1} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \quad (u_n) \text{ est croissante}$$

4) @ def suite():

$$u = 3$$

$$n = 0$$

while $u < 10^7$:

$$u = 5u - 4n - 3$$

$$n = n + 1$$

return n

⑥ d'après la calculatrice

$$\begin{cases} u_9 = 3\,906\,260 & (< 10^7) \\ u_{10} = 19\,531\,261 & (> 10^7) \end{cases}$$

donc la fonction renvoie $n = 10$.

Ex 2:

$$u_n = n^3 - 3n^2 + 5 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$u_n = n^2(n - 3) + 5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3) = +\infty$$

Par produit et somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

1,75

$$v_n = \frac{3n^2 + 4}{2 - 2n^2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$$

pour $n \neq 0$

$$v_n = \frac{n^2(3 + 4/n^2)}{n^2(2/n^2 - 2)} = \left(\frac{3 + 4/n^2}{2/n^2 - 2} \right)$$

17

Par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + 4/n^2) = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2/n^2 - 2) = -2$

Par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3/2$

25

$$w_n = (5 + (-1)^n) \times (3/4)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 5 + (-1)^n \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 4 \times (3/4)^n \leq w_n \leq 6 \times (3/4)^n$$

$$-1 < 3/4 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (3/4)^n = 0$$

Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \times (3/4)^n = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (3/4)^n = 0$

2,75

D'après le théorème des gendarmes (w_n) converge vers 0

Ex 3

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

1) $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{4}$ Réponse (b)

2) $v_n = u_n - n \quad (n \in \mathbb{N})$

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1$

$= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n$

$= \frac{1}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n$

(v_n) suite
géométrique
de raison $\frac{1}{2}$ Réponse (b)

3) "i in range (n)"

compte les tous de $i=0$ jusqu'à $i=n-1$
on veut afficher u_n

soit $\frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}(n-1) + 1$

donc $u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \times i + 1$ Réponse (d)