

Devoir n°14 - Etude de Fonction - TSpé

21 mai 2026 - 55 min

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f .

5. Dresser le tableau de variations de la fonction f' .

(les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.)

6. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement de α , au centième près.

8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.

Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n xe^{-x} \, dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .

2. a) Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .

b) Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.