

Devoir n°14 - Etude de Fonction - TSpé

21 mai 2026 - 55 min

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f .

5. Dresser le tableau de variations de la fonction f' .

(les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.)

6. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement de α , au centième près.

8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.

Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n xe^{-x} dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .

2. a) Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .

b) Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie A:

1) $f(x) = \frac{x}{e^x} + 2x - 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ Par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$
 ou $f(x) = \frac{1}{e^{1/x}} + 2x - 1$ Par Somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Par comparaisons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ Par quotient et somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 2 = (1-x)e^{-x} + 2$

3) $f''(x) = -e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(-1-1+x) = (x-2)e^{-x}$

4) $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x-2)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Donc f est concave sur $]-\infty; 2]$
puis convexe sur $[2; +\infty[$

5) $f''(x) = (f'(x))'$

on a donc

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$2 - e^{-2}$	

$$f'(2) = (1-2)e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2} \approx 1.86$$

6) $2 - e^{-2}$ est le minimum pour $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ atteint en $x=2$ or $2 - e^{-2} > 0$ donc $f(x) > 0$ et f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

7) Sur $\mathbb{R}$, f est continue ou dérivable
 f strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (0 \in \mathbb{R})$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$

D'après le calculatrice $f(0,37) < 0$ et $f(0,38) > 0$ donc $0,37 < \alpha < 0,38$

8) $\Delta: y = 2x - 1$ $f(x) - (2x - 1) = x e^{-x}$ du signe de x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x - 1)$	$-$	0	$+$

donc φ est au-dessus de Δ sur $]-\infty; 0]$

puis au-dessus sur $[0; +\infty[$

Partie B: $\mathcal{D}_m = \{ (x, y) / 1 \leq x \leq m; 2x - 1 \leq y \leq f(x) \} \quad x \geq 0!$
 $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 1) \quad I_m &= \int_1^m x e^{-x} dx = \left[x(-e^{-x}) \right]_1^m - \int_1^m 1 \cdot (-e^{-x}) dx \\ &= -m e^{-m} + e^{-1} - \left[e^{-x} \right]_1^m = -m e^{-m} + e^{-1} - e^{-m} + e^{-1} \\ &= \frac{2}{e} - (m+1) e^{-m} \end{aligned}$$

Donc $I_m = \frac{2}{e} - \frac{m+1}{e^m}$

2) Sur $[1; m]$ φ est au-dessus de Δ donc l'aire du domaine $\mathcal{D}_m$ en u.a. est donnée par I_m
@ f et $x \mapsto 2x - 1$ continues
 $1 \leq m$

6) Par comparaison $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m+1}{e^m} = 0$ Par somme $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{D}_m = \frac{2}{e}$