

Ex 2 : Patient A

1) $u_0 = 1$

$$u_1 = \left(1 - \frac{10}{100}\right) u_0 + 0,25 = 0,9 u_0 + 0,25 = 0,9 + 0,25 = \underline{1,15}$$

Au bout de 30 min, il y a 1,15 mg de médicament dans le sang

2) diminuer de 10% revient à $\times 0,9$

et le patient reçoit une dose de 0,25 (mg)

$$\text{donc } \underline{u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,25} \quad (n \in \mathbb{N})$$

3) @ on veut montrer que $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

• initialisation: pour $n = 0$

$u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$ on a bien $u_0 \leq u_1 \leq 5$ vrai pour $n = 0$

• hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \leq u_{n+1} \leq 5$

$$\text{alors } 0,9 u_n \leq 0,9 u_{n+1} \leq 4,5 \quad (0,9 > 0)$$

$$\text{et } 0,9 u_n + 0,25 \leq 0,9 u_{n+1} + 0,25 \leq 4,75$$

$$\text{soit } u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4,75 \text{ or } 4,75 \leq 5$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 5 \text{ vrai au rang } (n+1)$$

• conclusion: on a montré par récurrence que

$$\underline{u_n \leq u_{n+1} \leq 5} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

⑥ (u_n) est donc une suite croissante majorée par 5
Par théorème de convergence des suites monotones
 (u_n) converge vers 2.

4) @ def efficace():

$$u = 1$$

$$n = 0$$

while $u < 1,8$:

$$u = 0,9 * u + 0,25$$

$$n = n + 1$$

return n

$$⑥ \begin{cases} u_7 = 1,783 \\ u_8 = 1,854 \end{cases}$$

$$u_8 > 1,8$$

Au bout de 8 demi-heures

soit 4 h, le médicament
devient efficace

$$0,25 + 0,25$$

$$5) \quad N_m = 2,5 - u_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \quad N_{m+1} &= 2,5 - u_{m+1} \\ &= 2,5 - (0,9 u_m + 0,25) \\ &= 2,25 - 0,9 u_m \\ &= 2,25 - 0,9 (2,5 - N_m) \\ &= 2,25 - 2,25 + 0,9 N_m \\ &= 0,9 N_m \end{aligned}$$

$$\text{et } N_0 = 2,5 - u_0 = -1,5$$

(N_m) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ de la forme $N_0 = 2,5$

$$\textcircled{b} \quad \text{on a donc } N_m = N_0 \times q^m = -1,5 \times 0,9^m$$

$$\text{et } u_m = 2,5 - N_m = 2,5 - (-1,5 \times 0,9^m) \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\textcircled{c} \quad -1 < 0,9 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$$

Par produit et somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2,5$

donc $u_m < 3$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (u_n) croissante

D'après ce modèle, le traitement ne présente aucun risque pour le patient.

Partie B: $f(t) = 2,5 - 1,5 e^{-0,2t}$ (t heures) sur $[0; +\infty[$

$$1) \quad 3 \text{ h } 45 \text{ min} = 3,75 \text{ h}$$

$$f(3,75) = 2,5 - 1,5 e^{-0,2 \times 3,75} = 2,5 - 1,5 e^{-0,75}$$

$$f(3,75) < 1,8 \quad \text{Le médicament n'est pas réellement efficace au bout de 3 h 45 min}$$

$$2) \quad f(t) > 1,8$$

$$\Leftrightarrow 2,5 - 1,5 e^{-0,2t} > 1,8$$

$$\Leftrightarrow -1,5 e^{-0,2t} > -0,7$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,2t} \leq \frac{7}{15} \quad \text{car une exponentielle croissante par la suite}$$

$$\Leftrightarrow -0,2t \leq \ln(7/15)$$

$$\Leftrightarrow 0,2t \geq -\ln(7/15)$$

$$\Leftrightarrow t \geq 5 \ln\left(\frac{15}{7}\right)$$

$$5 \ln\left(\frac{15}{7}\right) \approx 3,812$$

Le médicament devient efficace au bout de 3 h 49 min (3,817 h)

3) Le résultat obtenu avec la fonction est plus précis

Ex 3 :

- $B(3; 0; 0)$
 $D(0; 3; 0)$
 $E(0; 0; 3)$
 $P(0; 0; 1)$
 $Q(0; 2; 3)$
 $R(-1; 0; 3)$
 $L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$

1) $\vec{PR} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{QR} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} PR^2 = 1+4=5 \\ QR^2 = 1+4=5 \end{cases} \quad PR = QR = \sqrt{5}$

donc le triangle PRQ est isocèle en R

2) $1 \neq -2$ Les coordonnées de $\vec{PR}$ et $\vec{QR}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{PR}$ et $\vec{QR}$ ne sont pas colinéaires : P, R et Q ne sont pas alignés et définissent un plan

3) soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{PR} = 2+0-2=0 \\ \vec{u} \cdot \vec{QR} = 2-2+0=0 \end{cases}$

@ $\vec{u} \perp \vec{PR}$ et $\vec{u} \perp \vec{QR}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (PQR) .

6) alors $(PQR): 2x + y - z + d = 0$
 $P(0; 0; 1) \in (PQR) \Leftrightarrow 0 + 0 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$

Donc (PQR) a pour équation cartésienne

$2x + y - z + 1 = 0$

7) $(d) \perp (PQR)$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d)

$E(0; 0; 3) \in (d)$

alors $(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

8) L projeté orthogonal de E sur le plan (PQR)

$\Leftrightarrow L \in (d) \cap (PQR)$

• $L \in (d)?$ $\begin{cases} \frac{2}{3} = 2t \\ \frac{1}{3} = t \\ \frac{8}{3} = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} = 3 - \frac{1}{3} \text{ ok} \end{cases} \quad \underline{L \in (d)}$

• $L \in (PQR)?$ $2 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 1 = -1 + 1 = 0$

$L \in (PQR)$

L est bien le projeté orthogonal de E sur le plan (PQR)

c) La distance entre le point E et le plan (PQR) est la longueur EL.

$$\vec{EL} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad EL^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow EL = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad 9.28$$

4) Le triangle EQR est rectangle en E

$$A_{EQR} = \frac{1}{2} \times ER \times EQ = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1 \text{ u.a.}$$

La hauteur correspondante est PE = 2 9.5

$$(\overrightarrow{PE}) \perp (\overrightarrow{EQ}) \text{ et } (\overrightarrow{PE}) \perp (\overrightarrow{ER})$$

$$\text{donc } N = \frac{1}{3} \times PE \times A_{EQR} = \frac{2}{3} \text{ u.N.} \quad \text{volume du tétraèdre E PQR}$$

$$5) \text{ on a aussi } N = \frac{1}{3} \times EL \times A_{PQR} = \frac{\sqrt{6}}{9} \times A_{PQR}$$

$$\text{donc } \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{6}}{9} \times A_{PQR}$$

$$\Leftrightarrow A_{PQR} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u.a.} \quad 9.5$$

Ex 4 $f(x) = (2 - \ln x) \ln x$ sur $]0; +\infty[$

1) a) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse est $f'(1)$
on lit $f'(1) = 2$

b) f' est croissante sur $]1; 3; +\infty[$ (environ)
donc f est convexe sur $]1; 3; +\infty[$

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Par produit
et somme

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$

Par produit
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Par produit
et somme

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - \ln x) = +\infty$

Par produit
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

Alors l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}$

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0$ ou $\ln x = 0$
sur $]0; +\infty[\Leftrightarrow \ln x = 2$ ou $x = 1$
 $\Leftrightarrow x = e^2$ ou $x = 1$

$S = \{1; e^2\}$

$\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $A(1; 0)$ et $B(e^2; 0)$

4) a) $f = uv$ $f' = u'v + uv'$

$f'(x) = -\frac{1}{x} \times \ln x + (2 - \ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{-\ln x + (2 - \ln x)}{x}$

donc $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$

b) $x > 0$ donc $f'(x)$ est du
même signe que $(1 - \ln x)$

$1 - \ln x > 0$

$\Leftrightarrow 1 > \ln x$

$\Leftrightarrow e > x$

$x \in]0; e[$
strictement
croissante
sur $]0; +\infty[$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		1	-

$f(e) = (2 - \ln e) \times \ln e$
 $= 2 - 1 = 1$

$$5) \quad \underline{f''(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[}$$

$2 > 0$
 $x^2 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(\ln x - 2)$

$$\ln x - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2$$

$$\Leftrightarrow x > e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$		-	0 +

9.8) $f''(x) \geq 0$ sur $[e^2; +\infty[$ donc f convexe sur $[e^2; +\infty[$.
 $(e^2 \approx 7,4)$

$f''(e^2) = 0$ et $f''(x)$ change de signe avant et après e^2
 donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion
 d'abscisse e^2 .

9.5

$$f(e^2) = (2 - \ln(e^2)) \times \ln(e^2) = (2 - 2) \times 2 \ln e = 0.$$

$$\underline{\underline{I(e^2; 0)}}$$