

Ex 2: $g(x) = 2x - x^2$ sur $[0; 1]$

1) $g'(x) = 2 - 2x$

x	-0	1	1.5
$2-2x$	+	0	-

sur $[0; 1]$ $g'(x) \geq 0$
donc g est croissante

x	0	1
$g(x)$	0	1

2) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} u_1 = g(u_0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ u_2 = g(u_1) = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16} \end{cases}$$

3) on veut montrer que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

initialisation: pour $n=0$

$u_0 = \frac{1}{2} = 0.5$ on a $0 < u_0 < u_1 < 1$ vrai pour $n=0$

$u_1 = \frac{3}{4} = 0.75$

hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$
 g croissante sur $[0; 1]$

donc $g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$

donc $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ vrai au rang $(n+1)$

conclusion: on a montré par récurrence

que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

4) On en déduit que (u_n) est croissante et majorée par 1
Par le théorème de convergence des suites monotones
 (u_n) converge vers l .

5) $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g continue (polynôme du second degré)
d'après le théorème du point fixe,
 l est solution de $g(x) = x$

$$g(x) = x \Leftrightarrow 2x - x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

sur $[0; 1]$

$u_0 = \frac{1}{2}$
 (u_n) croissante
donc $l \geq \frac{1}{2}$

Alors $l = 1$

$$6) \quad \underline{v_n = \ln(1 - u_n)} \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{v_{n+1}} &= \ln(1 - u_{n+1}) \\ &= \ln(1 - g(u_n)) \\ &= \ln(1 - 2u_n + u_n^2) \\ &= \ln((1 - u_n)^2) \quad 1 - u_n > 0 \\ &= 2 \ln(1 - u_n) \quad 0 < u_n < 1 \\ &= \textcircled{2v_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \ln(1 - u_0) \\ &= \ln(1/2) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 2 de première terme $v_0 = -\ln 2$

$$7) \text{ donc } \textcircled{v_n} = v_0 \times 2^n = \underline{-\ln 2 \times 2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$8) \quad v_n = \ln(1 - u_n) \Leftrightarrow e^{v_n} = 1 - u_n \Leftrightarrow u_n = 1 - e^{v_n}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_n &= 1 - e^{-\ln 2 \times 2^n} \\ &= 1 - e^{\ln(1/2) \times 2^n} = 1 - \left(e^{\ln(1/2)}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{soit } \underline{u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

$$2 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 0$$

$$\text{Par somme } \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

9) def sevil () :

$$n = 0$$

$$u = 0.5$$

while $u < 0.95$:

$$n = n + 1$$

$$u = 2 * u - u * u$$

return n

q25

Ex 3: $f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

Partie A:

1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de (T) tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. on lit $f'(1) = 3$ 0,25 + 0,25

(T): $y = 3x - 4$

2) il semble que f soit concave sur $]0; 1]$ puis convexe sur $[1; +\infty[$. 0,25 + 0,25

A semble être le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

Partie B:

$$\begin{array}{l} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \quad x = x^2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Par composition et produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x^2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Par Somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$$

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x} = 2x \ln x - \frac{1}{x}$$

0,5 + 0,5

Par comparaisons comparées $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln x = 0$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Par différence $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} 2) @ \underline{f'(x)} &= \left(1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} \right) + \frac{1}{x^2} \\ &= \underline{\ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

0,5

6 f' est dérivable comme composée et somme

$$\underline{f''(x)} = \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} = \underline{\underline{\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}}$$

0,25

3) @ $\begin{cases} x^2 > 0 \\ 2(x+1) > 0 \end{cases}$ sur $]0; +\infty[$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x-1)$ 9/25

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	0 +

$\left. \begin{array}{l} \text{sur }]0; 1], f''(x) \leq 0, f \text{ est concave} \\ \text{sur } [1; +\infty[, f''(x) \geq 0, f \text{ est convexe} \end{array} \right\}$

⑥ $f''(x) = (f'(x))'$

donc f' est strictement décroissante sur $]0; 1]$
puis croissante sur $[1; +\infty[$

alors $f'(1) = \ln 1 + 2 + \frac{1}{1} = 2 + 1 = 3$ est le minimum
 pour $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

alors $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur $]0; +\infty[$

4) @

x	0	$+\infty$
$f(x)$		- ∞

sur $]0; +\infty[$

f continue (car dérivable)

f strictement croissante

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0; +\infty[$.

⑥ d'après le calculatrice

$f(1,327) < 0$ et $f(1,328) > 0$ donc $1,327 < \alpha < 1,328$
 et $\alpha \approx 1,33$

de plus $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha^4) - \frac{1}{\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha^4) = \frac{1}{\alpha}$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha^4) = \frac{1}{\alpha^2}$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = e^{(1/\alpha^2)}$

Ex 4 :

$A(-2; 0; 2)$
 $B(-1; 3; 0)$
 $C(1; -1; 2)$
 $D(0; 0; 3)$
 $I(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{2}{7})$
 $H(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 2)$

1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{3}{1} = 3$ et $\frac{-1}{3} \neq 3$
 les coordonnées ne sont pas proportionnelles
 $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires
 donc A, B et C ne sont pas alignés,
 et définissent un plan (ABC) 9.5

2) $\vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 1 + 9 - 10 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AC} = 3 - 3 + 0 = 0 \end{cases}$ 9.75

@ $\vec{m} \perp \vec{AB}$ et $\vec{m} \perp \vec{AC}$ donc $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

⑥ alors (ABC) : $x + 3y + 5z + d = 0$ d?

$A \in (ABC) \Leftrightarrow 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

Donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 3y + 5z - 8 = 0$ 9.25

⑦ $0 + 3 \times 0 + 5 \times 0 - 8 = -8$ $-8 \neq 0$

donc D $\notin$ (ABC) Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. 9.5

3) @ $\mathcal{D}_1: \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

on lit $\vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$
 donc $\mathcal{D}_1 \perp (ABC)$

de plus $\begin{cases} 0 = t \\ 0 = 3t \\ 3 = 3 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{D \in \mathcal{D}_1}$

Donc $\mathcal{D}_1$ est la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD 9.5

⑥ $\mathcal{D}_2$ est la hauteur issue de C du tétraèdre ABCD

$\mathcal{D}_2: \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$

$I(x; y; z) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t = 1 + 3s \quad (L_1) \\ 3t = -1 - 5s \quad (L_2) \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t = 1 + 3s \\ 0 = 4 + 14s \quad 3(L_1) - (L_2) \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/7 \\ y = 3/7 \\ z = 26/7 \\ t = -1/7 \\ s = -2/7 \\ 3 + 5t = 2 + 12/7 \quad \text{vrai} \end{cases}$$

donc $I\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{26}{7}\right)$

D_1 et D_2 se rencontrent en I

1

4) @ H projet orthogonal de D
sur le plan (ABC)

$$H(x; y; z) \in \mathcal{D}_1 \cap (ABC)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ (t \in \mathbb{R}) \\ x + 3y + 5z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ 35t + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \\ z = 2 \\ t = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad \underline{H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)}$$

La distance du point D
au plan (ABC) est la
longueur DH.

$$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$DH^2 = \frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1 = \frac{10}{25} + 1 = \frac{35}{25}$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{DH} = \frac{\sqrt{35}}{5} \approx \underline{1,18}$$

0,5