

Devoir n°8 - Dénombrement - Loi Binomiale - TSpé maths

15 mars 2021 - 1 h

Exercice 1 (8 pts) : Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
 - a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
 - b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
 - a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
 - b) Quelle est la probabilité qu'un seul des cinq animaux ait un test positif ?
 - c) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

- a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
- b) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Exercice 2 (4 pts) : Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

- a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
- b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 3 (8 pts) : On a placé dans une boîte, 15 jetons numérotés de 1 à 15 dont 3 jetons blancs, 6 rouges, 4 verts et 2 noirs tous indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard simultanément 6 jetons de cette boîte.
 - a) Combien de tirages possibles y a-t-il ?
 - b) Combien de tirages possibles y a-t-il comprenant 6 jetons rouges ?
 - c) Combien de tirages possibles y a-t-il comprenant 2 jetons blancs et 4 jetons verts ?
 - d) Combien de tirages possibles y a-t-il comprenant 2 jetons rouges et 1 jeton noir ?
2. On tire au hasard successivement et sans remise 6 jetons de cette boîte.
 - a) Combien de tirages possibles y a-t-il ?
 - b) Combien de tirages possibles y a-t-il permettant d'obtenir **dans cet ordre** 1 jeton rouge puis 1 jeton noir puis 1 jeton rouge puis 1 jeton vert puis un jeton blanc puis un jeton rouge ?
 - c) En déduire le nombre de tirages possibles permettant d'obtenir 3 jetons rouges, 1 jeton noir, 1 jeton vert et 1 jeton blanc ?
3. On tire au hasard successivement et avec remise 6 jetons de cette boîte.
 - a) Combien de tirages possibles y a-t-il ?
 - b) Combien de tirages possibles y a-t-il ne comprenant que des jetons noirs ?
 - c) Combien de tirages possibles y a-t-il comprenant au moins un jeton vert ?