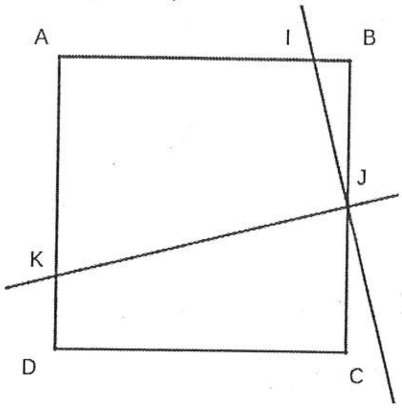
Test n°9 - Produit Scalaire - Equations de droites - 1ère spé maths

25 mai 2023 - 30 min

Exercice 1 (5 pts) :



$ABCD$ est un carré de côté 8.

I, J et K sont tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$,
J est le milieu de $[CB]$, et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

Que peut-on dire des droites (IJ) et (KJ) ?

Exercice 2 (3 pts) : $[AB]$ est un segment de longueur 4 cm, et I est le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - 4$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -4$.
3. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2$.

Exercice 3 (3 pts) : Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
On considère la droite (d) d'équation $-x + y + 9 = 0$ et le point $A(0;9)$.

1. Le point A appartient-il à (d) ?
2. Donner un vecteur normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') perpendiculaire à (d) passant par A.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite (d).

Ex 1 : Soit le repère orthonormé $(D; \frac{1}{8}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{8}\overrightarrow{DA})$

/3

$D(0;0)$
$C(8;0)$
$A(0;8)$
$B(8;8)$
$I(7;8)$
$J(8;4)$
$K(0;2)$

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$ donc $I(7;8)$

J milieu de $[CB]$ donc $J(8;4)$

$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ donc $K(0;2)$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KJ} = 1 \times 8 + (-4) \times 2 = 0$

donc $(IJ) \perp (KJ)$

Ex 2 : $[AB]$ de longueur 4 cm
I milieu de $[AB]$ 13

1) D'après le théorème de la médiane 1

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ or $AB^2 = 4^2 = 16$

donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - 4$

2) $\mathcal{E} = \{M \,/\, \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -4\}$ 1

$M \in \mathcal{E} \iff MI^2 - 4 = -4 \iff MI^2 = 0 \iff MI = 0$

donc $\mathcal{E}$ se réduit au point I.

3) $\mathcal{F} = \{M \,/\, \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2\}$ 1

$M \in \mathcal{F} \iff MI^2 - 4 = 2 \iff MI^2 = 6 \iff IM = \sqrt{6}$

donc $\mathcal{F}$ est le cercle de centre I de rayon $\sqrt{6}$

Ex 3 : $(d) : -2x + y + 3 = 0$ 14

1) $A(1;2)$ $-2+2+3 = 3$ $3 \neq 0$ donc $A \notin (d)$ 0,5

2) on lit $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (d) 0,5

3) Soit $(d') \perp (d)$ alors $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d') alors $(d') : x + 2y + c = 0$

$A \in (d') \iff 1 + 4 + c = 0 \iff c = -5$

Donc $(d') : x + 2y - 5 = 0$ 1,5

4) soit H le projeté orthogonal de A sur (d) alors H est l'intersection de (d) et (d')

$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 & (L_1) \\ x + 2y - 5 = 0 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 7/5 \\ x = \frac{11}{5} \end{cases}$ 1,5

$\iff \begin{cases} 5y - 7 = 0 & (2L_2 + L_1) \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$

Donc $H\left(\frac{7}{5};\frac{11}{5}\right)$