Devoir n°8 - Fonction Exponentielle - Probabilités - Suites - 1ère spé maths

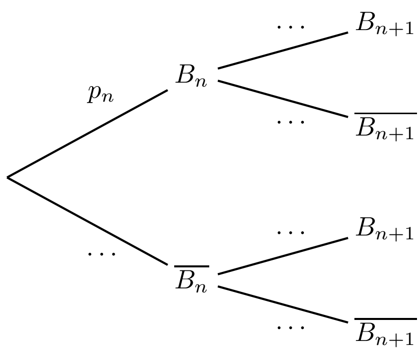
28 mars 2023 - 1h

Exercice 1 (6 pts) : Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

On estime que :
- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   c) Quelle semble être la limite de la suite (p_n) ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (5,5 pts) : Une entreprise fabrique x centaines d'objets, où $x \in [0; 40]$.
On suppose que toute la production de l'entreprise est vendue, et que le bénéfice, en milliers d'euros, de cette entreprise, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 40]$ par

$$f(x) = (10x - 10)\mathrm{e}^{-0,1x}$$

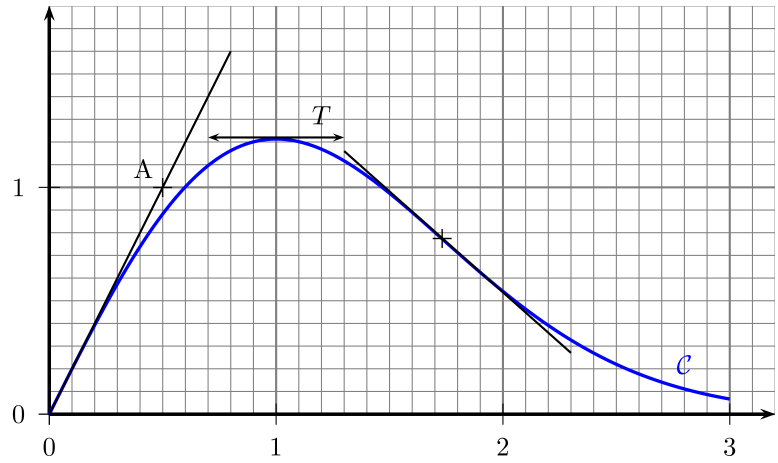
1. Déterminer la perte de l'entreprise lorsqu'il n'y a pas de production.
2. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel sera alors le montant de ce bénéfice ?
3. A partir de quelle quantité produite et vendue, l'entreprise réalise un bénéfice ?

Exercice 3 (4,5 pts) : On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0;3]$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{cx^2}$$

où a, b et c sont des nombres réels.

On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ; elle passe par le point A de coordonnées (0,5 ; 1).
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Montrer que $f'(x) = (2acx^2 + 2bcx + a)\mathrm{e}^{cx^2}$.
3. Déterminer les valeurs de a, b et c.

Exercice 4 (6 pts) :

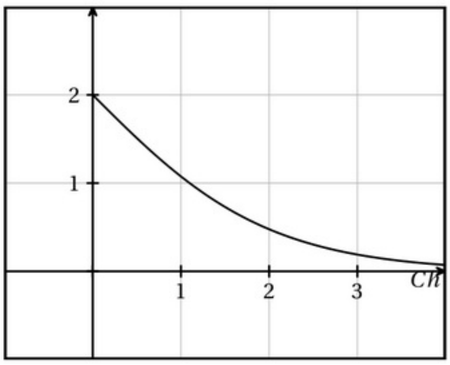
Partie A : Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Etudier les variations de la fonction g.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième, du réel α, solution de l'équation $g(x) = 0$.
3. En déduire le tableau de signes de $g(x)$.
4. Montrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour $x \geq 0$.
2. En déduire les variations de f.

Partie C (Bonus) : On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormal.



Pour tout réel $x \geq 0$, on note :
M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x;h(x))$,
P le point de coordonnées $(x;0)$,
et Q le point de coordonnées $(0;h(x))$.

1. Montrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α et donner une valeur approchée de cette aire (en unités d'aire).
2. Si le point M a pour abscisse α, la tangente (T) en M à la courbe est-elle parallèle à la droite (PQ) ?