Devoir n°8 - Fonction Exponentielle - Probabilités - Suites - 1ère spé maths

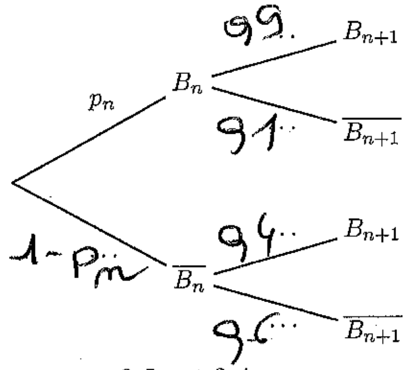
28 mars 2023 - 1h

Exercice 1 (6 pts) : Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

On estime que :
— lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
— lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   c) Quelle semble être la limite de la suite (p_n) ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (5,5 pts) : Une entreprise fabrique x centaines d'objets, où $x \in [0; 40]$.
On suppose que toute la production de l'entreprise est vendue, et que le bénéfice, en milliers d'euros, de cette entreprise, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 40]$ par

$$f(x) = (10x - 10)e^{-0,1x}$$

1. Déterminer la perte de l'entreprise lorsqu'il n'y a pas de production.
2. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel sera alors le montant de ce bénéfice ?

3. A partir de quelle quantité produite et vendue, l'entreprise réalise un bénéfice ?

Correction du dev 8 - 1 spé

Ex 1 : 1) arbre 1,5 0,5

2) B_n et $\overline{B}_n$ forment une partition de l'univers des trottinettes le lundi, donc d'après la formule des probabilités totales 0,5

$p_{n+1} = p(B_{n+1}) = p(B_n \cap B_{n+1}) + p(\overline{B}_n \cap B_{n+1})$

$= p_n \times 0{,}9 + (1-p_n) \times 0{,}4$

$= 0{,}9\, p_n + 0{,}4 - 0{,}4\, p_n$

0,75 $= 0{,}5\, p_n + 0{,}4$ pour $n \in \mathbb{N}$

3) $u_n = p_n - 0{,}8 \iff p_n = u_n + 0{,}8$ avec $p_0 = 1$ 0,5

(a) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8$

$= (0{,}5\, p_n + 0{,}4) - 0{,}8$

$= 0{,}5\, p_n - 0{,}4$

$= 0{,}5(u_n + 0{,}8) - 0{,}4$

$= 0{,}5\, u_n + 0{,}4 - 0{,}4$

1,5 $= 0{,}5\, u_n$

$u_0 = p_0 - 0{,}8 = 0{,}2$ 0,25

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,5 de 1er terme $u_0 = 0{,}2$ 0,5

(b) donc $u_n = 0{,}2 \times 0{,}5^n$ et $p_n = 0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}8$ 0,5

(c) $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$

par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0{,}8$ 0,5 + 0,5

Plus le temps passe, plus la probabilité que la trottinette soit en bon état s'approche de 0,8

Ex 2 : $f(x) = (10x - 10)e^{-0{,}1x}$ sur $[0 ; 40]$ 1,5

Bénéfice en milliers d'€ pour x centaines d'objets

1) $f(0) = -10e^0 = -10$ Lorsqu'il n'y a pas de production, l'entreprise perd 10000 € 1

2) $f'(x) = 10e^{-0{,}1x} + (10x - 10)e^{-0{,}1x} \times (-0{,}1)$

$= (10 - x + 1)e^{-0{,}1x}$

$= \boxed{(11 - x)e^{-0{,}1x}}$ 1

$e^{-0,1x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(11-x)$ 0,5

donc

x	0		11		40
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-10	$\nearrow$	$f(11)$	$\searrow$	$f(40)$

1

$f(11) = 100\, e^{-1,1} \simeq 33,3$

$f(40) = 390\, e^{-4} \simeq 7,1$

Le bénéfice maximal sera de 33 300 € environ pour 1100 objets fabriqués et vendus 1

3) $f(x) > 0 \iff (10x - 10)e^{-0,1x} > 0 \iff 10x - 10 > 0$
$\iff x > 1$

L'entreprise réalise un bénéfice à partir de 101 objets produits et vendus 1

Ex 3 : $\boxed{f(x) = (ax+b)\, e^{cx^2}}$ sur $[0;3]$

1) $\boxed{f(0) = 0}$ car $O(0;0) \in \mathcal{C}$ 0,25
$f'(0)$ est le coefficient directeur de ~~D~~ ~~tangente~~ 0,5
à $\mathcal{C}$ en O, on lit $\boxed{f'(0)} = 1/0,5 = 2$ 0,5
et $\boxed{f'(1) = 0}$ tangente horizontale 0,25

2) $\boxed{f'(x)} = a e^{cx^2} + (ax+b)e^{cx^2} \times 2cx$ (4,5
$= (a + 2cx(ax+b))\, e^{cx^2}$
$= (a + 2acx^2 + 2bcx)\, e^{cx^2}$
$= \boxed{(2acx^2 + 2bcx + a)e^{cx^2}}$ 1

3) $f(0) = 0 \iff b e^0 = 0 \iff b = 0$ 0,5
$f'(0) = 2 \iff a e^0 = 2 \iff a = 2$ 0,5
$f'(1) = 0 \iff (2ac + 2bc + a)e^c = 0$
$\iff 2ac + 2bc + a = 0$ on remplace $b = 0$ et $a = 2$
donc $4c + 2 = 0 \iff c = -0,5$ 0,75

Donc $\boxed{f(x) = 2x\, e^{-0,5x^2}}$ 0,25

Ex 4 : Partie A : $\boxed{g(x) = e^x - xe^x + 1}$ sur $[0;+\infty[$ 16

1) $g'(x) = e^x - (1 \times e^x + x \times e^x) = -xe^x$ 1

$e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(-x)$ donc

g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ 1

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	2	$\searrow$

2) d'après la calculatrice,

$g(1,27) > 0$
$g(1,28) < 0$ } donc $\boxed{\alpha \simeq 1,28}$ par excès 0,75

3) alors 0,5

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

4) $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \iff e^\alpha(1-\alpha) + 1 = 0$

$\iff e^\alpha = \dfrac{-1}{1-\alpha} \iff e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ 0,75

Partie B : $\boxed{f(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}}$ sur $[0;+\infty[$

1) $f'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4\,g(x)}{(e^x+1)^2}$ 1

$4 > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ 0,5

2) on a donc f strictement croissante sur $[0;\alpha[$ 0,5

puis décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

Partie C : $\boxed{h(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}}$ sur $[0;+\infty[$

1) $A(x) = OP \times OQ = x \times h(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1} = f(x)$

donc l'aire est maximale quand f est maximal

soit pour $x = \alpha$ d'après B) 2)

$f(\alpha) \simeq f(1,28) \simeq \ldots$

2) Le coefficient directeur de (PQ) est :

$a = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{h(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = \dfrac{4/e^\alpha + 1}{-\alpha} = \dfrac{-4}{\alpha(e^\alpha + 1)}$

Le coefficient directeur de la tangente (T) en M est $h'(\alpha)$

$h'(x) = \dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$ donc $h'(\alpha) = \dfrac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}$ or $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

et $e^\alpha + 1 = \dfrac{1}{\alpha - 1} + 1 = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$

On a donc $a = \dfrac{-4}{\alpha \times \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}} = \dfrac{-4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$

et $h'(\alpha) = \dfrac{-4 \times \dfrac{1}{\alpha - 1}}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^2} = \dfrac{-4}{\alpha - 1} \times \dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^2} = \dfrac{-4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$

$a = h'(\alpha)$ donc $\boxed{(T) // (\underline{PQ})}$

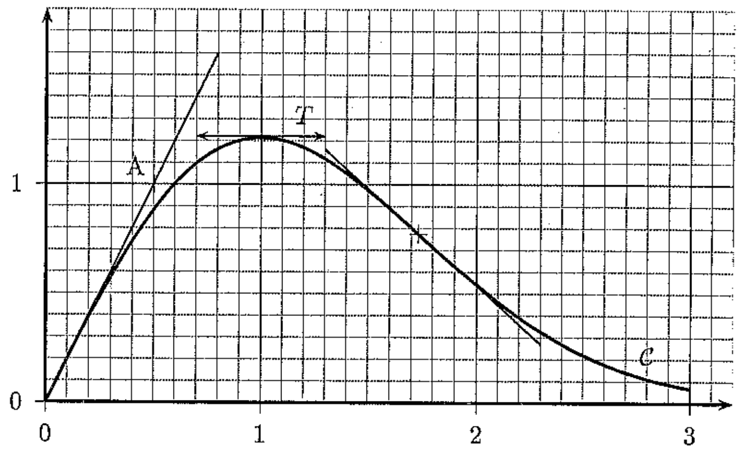
Exercice 3 (4,5 pts) : On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0;3]$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^{cx^2}$$

où a, b et c sont des nombres réels.

On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ; elle passe par le point A de coordonnées (0,5 ; 1).
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Montrer que $f'(x) = (2acx^2 + 2bcx + a)e^{cx^2}$.
3. Déterminer les valeurs de a, b et c.



Exercice 4 (6 pts) :

Partie A : Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

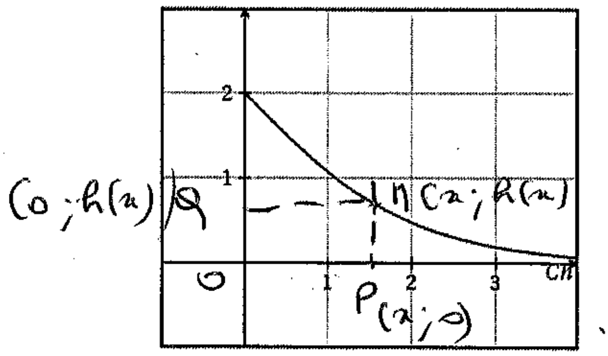
1. Etudier les variations de la fonction g.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième, du réel α, solution de l'équation $g(x) = 0$.
3. En déduire le tableau de signes de $g(x)$.
4. Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour $x \geq 0$.
2. En déduire les variations de f.

Partie C (Bonus) : On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormal.

Pour tout réel $x \geq 0$, on note :
M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x; h(x))$,
P le point de coordonnées $(x; 0)$,
et Q le point de coordonnées $(0; h(x))$.



1. Montrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α et donner une valeur approchée de cette aire (en unités d'aire).
2. Si le point M a pour abscisse α, la tangente (T) en M à la courbe est-elle parallèle à la droite (PQ) ?