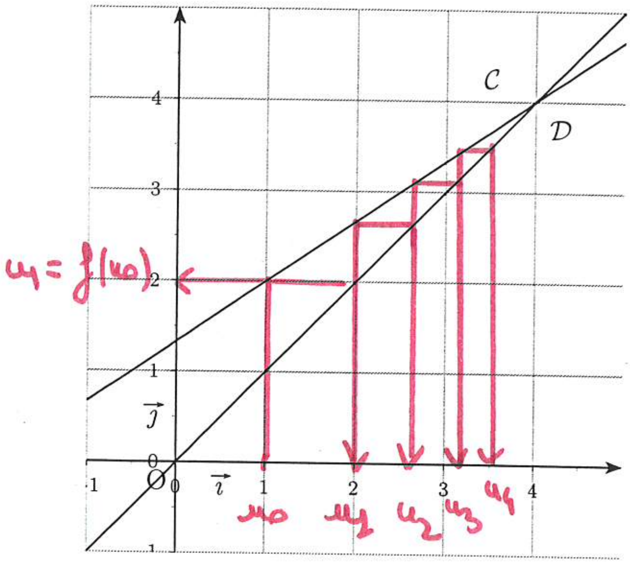
Devoir n°7 - Fonctions - Probabilités - Suites - 1ère spé maths

9 mars 2023 - 2h

Exercice 1 (2 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+4}{3}$.

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$



1. On a tracé ci-contre, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. Faire apparaître les traits de construction.
2. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) ? sur sa limite ?

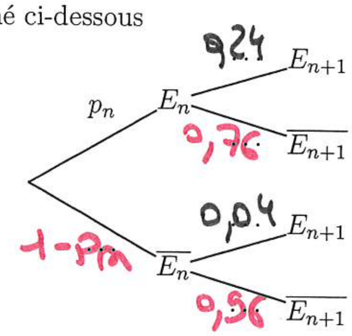
Exercice 2 (8 pts) : Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe

.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité de $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité de $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. a) Compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



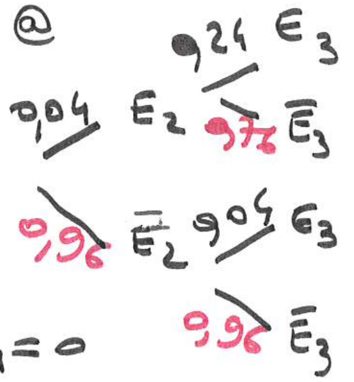
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
   c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
   d) En déduire que $p_n = 0,05 - 0,05 \times (0,2)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   e) Déterminer les variations de la suite (p_n).
   f) Quelle semble être la limite de la suite (p_n) ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Correction du dev 7 - 1ère

Ex 1 : 2) il semble que la suite (u_n) soit croissante et convergente vers 4

Ex 2

1) a)



$p_1 = 0$

D'après la formule des probabilités totales

$$p_3 = p(E_3) = p(E_2 \cap E_3) + p(\bar{E}_2 \cap E_3)$$
$$= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04$$
$$= \boxed{0,048}$$

b) $\boxed{p_{E_3}(E_2)} = \dfrac{p(E_2 \cap E_3)}{p(E_3)} = \dfrac{0,04 \times 0,24}{0,048} = 0,2$

2) a) arbre

b) $p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\bar{E}_n \cap E_{n+1})$ probabilités totales

$$= p_n \times 0,24 + (1 - p_n) \times 0,04$$
$$= 0,24\, p_n + 0,04 - 0,04\, p_n$$
$$= \boxed{0,2\, p_n + 0,04}$$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

c) $\boxed{u_n = p_n - 0,05} \Longleftrightarrow p_n = u_n + 0,05$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05$$
$$= (0,2\,p_n + 0,04) - 0,05$$
$$= 0,2\,p_n - 0,01$$
$$= 0,2(u_n + 0,05) - 0,01$$
$$= 0,2\,u_n + 0,01 - 0,01$$
$$= 0,2\,u_n$$

$u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,2$ de 1er terme $u_1 = -0,05$

d) alors $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$

et $p_n = u_n + 0,05 = \boxed{0,05 - 0,05 \times (0,2)^{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

e) $p_{n+1} - p_n = (0,05 - 0,05 \times 0,2^n) - (0,05 - 0,05 \times 0,2^{n-1})$

$$= -0,05 \times 0,2^n + 0,05 \times (0,2)^{n-1}$$
$$= 0,05 \times (0,2)^{n-1}(-0,2 + 1) = 0,05 \times (0,2)^{n-1} \times 0,8$$

$p_{n+1} - p_n > 0$ donc (p_n) est croissante

f) il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0 \text{ car } -1 < 0,2 < 1 \right)$

Au fil du temps, la probabilité que le salarié soit absent pour maladie se rapproche de 0,05.

Ex 3 : $\boxed{f(x) = -x^3+3x^2-2x-6}$ sur $\mathbb{R}$

1) a) $\boxed{f'(x) = -3x^2+6x-2x}$

b) $\Delta = 36-4\times3\times2 = 12$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+2\sqrt{3}}{-6} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \simeq 0,4$

$x_2 = \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{-6} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \simeq 1,6$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	↗	$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$	↘	

$a = -3$
du signe de a
à l'extérieur des racines

2) $u_n = -n^3+3n^2-2n-6$ (pour $n \in \mathbb{N}$)

a) $u_0 = -6$; $u_1 = -1+3-2-6 = -6$;
et $u_2 = -8+3\times4-4-6 = -6$

b) $u_n = f(n)$ avec f sur $[0;+\infty[$
d'après la question 1) b), f est décroissante
sur $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$ $\qquad \frac{3+\sqrt{3}}{3} \simeq 1,6$

donc (u_n) décroissante à partir de $n=2$
(et même pour tout $n \in \mathbb{N}$
puisque $u_0 = u_1 = u_2$)

Ex 4 : $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $g(x) = x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$

1) $f'(x) = \dfrac{3(x+2) - (3x-2)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{3x+6-3x+2}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{8}{(x+2)^2}}$

$f'(x) > 0$ donc

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

2) $\boxed{g'(x) = 2x+2}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

3) a) (T) : $y = f'(0)\times(x-0) + f(0)$

$f'(0) = \frac{8}{4} = 2$ et $f(0) = \frac{-2}{2} = -1$.

donc $y = 2x - 1$

b) (T') : $y = g'(0)\times(x-0) + g(0)$

$g'(0) = 2$ et $g(0) = -1$

donc $y = 2x - 1$

c) Effectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune en $A(0\,;-1)$

---

4) Bonus

a) $f(x) - g(x) = \dfrac{3x-2}{x+2} - (x^2+2x-1) = \dfrac{3x-2-(x^2+2x-1)(x+2)}{x+2}$

pour $x \neq -2$ $= \dfrac{3x-2-(x^3+2x^2+2x^2+4x-x-2)}{x+2}$

$= \dfrac{-x^3-4x^2}{x+2} = \dfrac{-x^2(x+4)}{x+2}$

b)

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	$\|$	$-$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	

$\mathcal{C}_g$ est au-dessous de $\mathcal{C}_f$ sur $]-4\,;-2[$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\,;-4]$ et sur $]-2\,;+\infty[$