Correction du dev 3 - Spé

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 8}{x+2}$ sur $\left[\dfrac{-3}{2} ; 3\right]$ 15

1) $u(x) = 2x^2 - x - 8$ $\quad u'(x) = 4x - 1$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$v(x) = x + 2$ $\quad v'(x) = 1$

donc $f'(x) = \dfrac{(4x-1)(x+2) - (2x^2 - x - 8)}{(x+2)^2} = \dfrac{4x^2 + 8x - x - 2 - 2x^2 + x + 8}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 6}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{2(x^2 + 4x + 3)}{(x+2)^2}}$ 1,5

2) $(x+2)^2 > 0$, $2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x) = x^2 + 4x + 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4$ $\quad \sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-2}{2} = \cancel{-3}$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$

$-3 \notin \left[\frac{-3}{2} ; 3\right]$ 1

x	$-3/2$		-1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$1,4$

$a = 1$, $a > 0$: du signe de a à l'extérieur des racines

1

3) (-5) est le minimum pour f sur $[-3/2 ; 3]$ atteint en $x = -1$ 0,5

4) T : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$\begin{cases} f(2) = -0,5 = \dfrac{-1}{2} \\ f'(2) = 1,875 = \dfrac{15}{8} \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{15}{8}(x-2) - \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{15}{8}x - \dfrac{15}{4} - \dfrac{2}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{15}{8}x - \dfrac{17}{4}}$ 1

5) **Tracé** 0,5

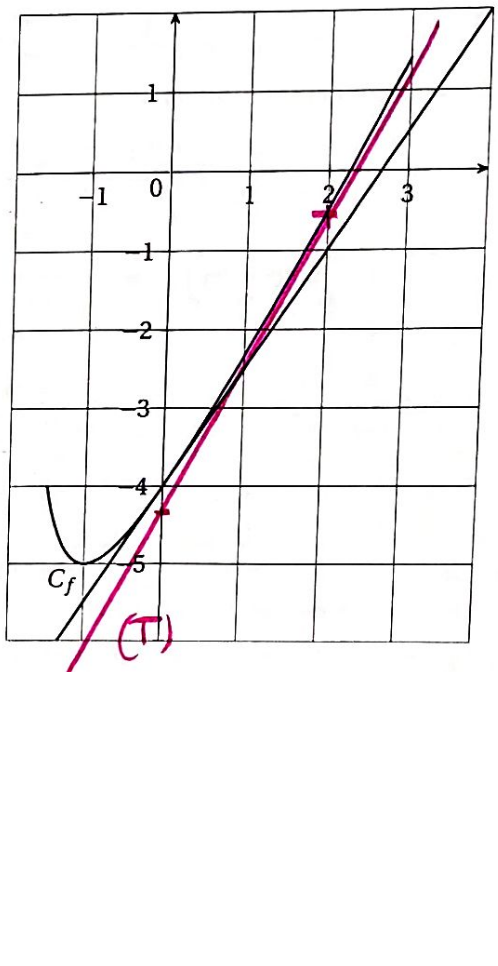
Exercice 1 (5 pts) :

Soit la fonction f définie sur $[-\frac{3}{2};3]$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 8}{x + 2}$$

Ci-contre, on a tracé C_f la représentation graphique de f, ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2(x^2 + 4x + 3)}{(x + 2)^2}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.
3. La fonction f admet-elle un extremum sur $[-\frac{3}{2};3]$?
4. Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
5. Tracer T dans le graphique ci-contre.



Ex2 : 1) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, donc en C 1

$\boxed{f'(0)=0}$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses)

de même, on lit $\boxed{f'(-2)} = \frac{-3}{1} = -3$ en A

0,5

(/3)

2) $f'(x)>0 \iff f$ strictement croissante

on lit $\boxed{S =]0;6[\cup]6;+\infty[}$ $(f'(0)=f'(6)=0)$ 1

3) D'après la question précédente, seule la courbe $\mathcal{C}_2$ peut représenter f'. 0,5

Ex3 : $f(x)=x^3$ et $g(x)=-3x^2+9x+1$ sur $\mathbb{R}$ 0,5

on pose $h(x)=f(x)-g(x)=x^3+3x^2-9x-1$ sur $\mathbb{R}$

1) $\boxed{h'(x)=3x^2+6x-9} = 3(x^2+2x-3) \overset{0,5}{=} 3(x-1)(x+3)$

2) $h'(x)$ est du signe de (x^2+2x-3) ou $\Delta \ldots \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{cases}$ 0,5

x	$-\infty$		-3		1	2	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a=1$
$a>0$

1

donc h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et sur $[2;+\infty[$ 0,5

3) $h(2)=2^3+3\times2^2-9\times2-1 = 1$

(/4)

$h(2)>0$ 1

donc $h(x)>0$ sur $[2;+\infty[$

c'est à dire $f(x)>g(x)$ sur $[2;+\infty[$

Ex4 : 1) $DE = AF = BG = CH = x$ avec $\boxed{0 \le x \le 4}$

$AB = 8$ cm et $AD = 4$ cm

ⓐ aire du ~~triangle~~ DEF rectangle en D

$A_1 = \frac{1}{2} \times DF \times DE = \frac{1}{2} \times (4-x) \times x = \boxed{\frac{x(4-x)}{2}}$ (cm²) 0,5

aire du ~~triangle~~ FAG rectangle en A

$A_2 = \frac{1}{2} \times AF \times AG = \frac{1}{2} \times x \times (8-x) = \boxed{\frac{x(8-x)}{2}}$ (cm²) 0,5

ⓑ Aire du quadrilatère EFGH

$A = AD \times AB - 2 \times A1 - 2 \times A2$

$= 4 \times 8 - x(4-x) - x(8-x)$

$= 32 - 4x + x^2 - 8x + x^2$

$= \underline{2x^2 - 12x + 32}$ (cm²) 1

2) soit $\underline{f(x) = 2x^2 - 12x + 32}$ sur $[0;4]$

$\underline{f'(x) = 4x - 12}$

x	0		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	32	$\searrow$	14	$\nearrow$	16

L'aire est donc minimale pour $x = 3$ et elle vaut 14 (u.a)

1,25

3) $f(x) \geq 16 \iff 2x^2 - 12x + 32 \geq 16$

$\iff 2x^2 - 12x + 16 \geq 0$

$\iff x^2 - 6x + 8 \geq 0$

$\iff (x-2)(x-4) \geq 0$

2 est racine évidente

ou Δ .. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

x	0		2		4
$x^2 - 6x + 8$		$+$	0	$-$	0

$a = 1$

$a > 0$

1,25

L'aire est supérieure à 16 pour $0 \le x \le 2$ et pour $x = 4$.

Ex 5 : $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et $g(x) = -x-1$ sur $\mathbb{R}$

1) $\mathcal{D} : y = -x-1$ 0,5

2) $f(x) > g(x) \iff \frac{2x-1}{x-3} > -x-1 \iff \frac{2x-1}{x-3} + (x+1) > 0$

$$\iff \frac{2x-1+(x+1)(x-3)}{x-3} > 0$$

$$\iff \frac{2x-1+x^2-3x+x-3}{x-3} > 0$$ 1

$$\iff \boxed{\frac{x^2-4}{x-3} > 0} \iff \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} > 0$$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	$\|$	$+$	
$\frac{x^2-4}{x-3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

1,5

$S =]-2;2[\cup]3;+\infty[$ $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{D}$. 0,5

3) $f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x+1}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$ +0,5

4) il s'agit de résoudre $f'(x) = -1$ coefficient directeur de $\mathcal{D}$

$$\frac{-5}{(x-3)^2} = -1$$

$\iff -5 = -(x-3)^2$

$\iff (x-3)^2 = 5$

$\iff x-3 = \sqrt{5}$ ou $x-3 = -\sqrt{5}$

$\iff x = 3+\sqrt{5}$ ou $x = 3-\sqrt{5}$

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à D aux points d'abscisses $3-\sqrt{5}$ et $3+\sqrt{5}$

Exercice 5 (3,5 pts) : Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} \quad \text{et} \quad g(x) = -x-1$$

. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, donnée ci-contre, et on note $\mathcal{D}$ la représentation graphique de g.

1. Tracer $\mathcal{D}$ dans le repère ci-dessous.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et contrôler graphiquement le résultat.

Bonus :

3. Déterminer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ pour lesquels la tangente parallèle à $\mathcal{D}$?